FUZZY LOGIC

ฟัซซีลอจิก (fuzzy logic) ศาสตร์ด้านการคำนวณที่เข้ามามีบทบาทมากขึ้นในวงการวิจัยด้านคอมพิวเตอร์ และได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่าง ๆ มากมาย เช่น ด้านการแพทย์ ด้านการทหาร ด้านธุรกิจ ด้านอุตสาหกรรม เป็นต้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่นักศึกษาด้านวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ วิทยาการคอมพิวเตอร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ ควรจะได้ศึกษาเพื่อทำความเข้าใจในศาสตร์ฟัซซีลอจิกและโครงข่ายประสาทเทียมให้ลึกซึ้ง ทั้งนี้เพื่อนำไปประยุกต์ใช้งานด้านต่างๆซึ่งนับวันจะยิ่งมีความต้องการระบบคอมพิวเตอร์ ที่มีความสามารถในการปรับเปลี่ยนระบบได้โดยอัตโนมัติตามสภาพแวดล้อมที่เปลี่ยนไป มีการตัดสินใจแบบชาญฉลาดเยี่ยงมนุษย์ได้มากขึ้น ซึ่งมนุษย์สามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่ไม่เคยพบได้โดยอาศัยความรู้เก่าที่ได้เรียนรู้มาประยุกต์ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ระบบฟัซซี

เป็นระบบด้านคอมพิวเตอร์ที่ทำงานโดยอาศัยฟัซซีลอจิกที่คิดค้นโดย L. A. Zadeh ในปี ค.ศ. 1965 ซึ่งเป็นผลงานวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอก ฟัซซีลอจิกเป็นตรรกะที่อยู่บนพื้นฐานความเป็นจริงที่ว่า ทุกสิ่งบนโลกแห่งความเป็นจริงไม่ใช่มีเฉพาะสิ่งมีความแน่นอนเท่านั้น แต่มีหลายสิ่งหลายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างไม่เที่ยงและไม่แน่นอน (uncertain) อาจเป็นสิ่งที่คลุมเครือ (fuzzy) ไม่ใช่ชัดเจน (exact) ยกตัวอย่างเช่น เซตของอายุคน อาจแบ่งเป็น วัยทารก วัยเด็ก วัยรุ่น วัยกลางคน และวัยชรา จะเห็นได้ว่าในแต่ละช่วงอายุคนไม่สามารถระบุได้แน่ชัดว่าวัยทารกกับวัย เด็กแยกจากกันแน่ชัดช่วงใด วัยทารกอาจถูกตีความว่าเป็นอายุระหว่าง 0 ถึง 1 ปี บางคนอาจตีความว่าวัยทารกอยู่ในช่วงอายุ 0 ถึง 2 ปี ในทำนองเดียวกัน วัยเด็กและวัยรุ่น ก็ไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่าช่วงต่อของอายุควรจะอยู่ในช่วงใด อาจตีความว่าวัยเด็กมีอายุอยู่ในช่วง 1 ถึง 12 ปี หรืออาจเป็น 2 ถึง 10 ปี เป็นต้น สิ่งเหล่าเป็นตัวอย่างของความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นลักษณะทางธรรมชาติที่เกิดขึ้นทั่วไป เซตของเหตุการณ์ที่ไม่แน่นอนเช่นนี้เรียกว่าฟัซซีเซต (fuzzy set)

จากแนวความคิดของ Zadeh เกี่ยวกับความไม่แน่นอนได้มีการขยายแนวคิดเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ มากมายจนนับไม่ถ้วน ได้มีนักวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีเสริมกับแนวคิดเดิมจนทำให้ฟัซซีเซตโดดเด่นในวงการคอมพิวเตอร์ ถึงแม้ว่าฟัซซีเซตจะนำเสนอจากคนอเมริกันแต่ประเทศอเมริกาก็ไม่ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างจริงจังในช่วงต้น ๆ แต่ประเทศญี่ปุ่นเล็งเห็นคุณค่าของศาสตร์ด้านนี้ได้เป็นผู้บุกเบิกฟัซซีเซตทางการค้า โดยได้นำไปประยุกต์ใช้ในเครื่องใช้ไฟฟ้ามากมาย เช่น เครื่องปรับอากาศ เครื่องซักผ้า หม้อหุงข้าว และอื่น ๆ อีกมากมาย ในยุคปัจจุบันประเทศสหรัฐอเมริกาได้ในความสำคัญกับศาสตร์นี้มากขึ้น โดยได้มีการทุ่มงบประมาณให้กับการวิจัยมากขึ้น และฟัซซี

ลอจิกถูกนำไปประยุกต์ใช้งานต่าง ๆ มากมาย ตัวอย่างเช่น ในโครงการอวกาศ NASA และโครงการด้านการทหาร

โครงข่ายประสาทเทียมแบบฟัซซี

ฟัซซีลอจิกและโครงข่ายประสาทเทียมต่างก็มีข้อดีและข้อเสียที่แตกต่างกัน ฟัซซีลอจิกมีข้อดีในเรื่องการมีเหตุผลเชิงตรรกะ โครงสร้างของระบบฟัซซีสามารถเข้าใจได้เนื่องจากสามารถตีความให้ในรูป If-Then ซึ่งสอดคล้องกับตรรกะความคิดของมนุษย์ และนอกจากนั้นฟัซซีลอจิกยังช่วยในการตัดสินใจที่คลุมเครือที่ยอมให้การตัดสินใจเป็นแบบส่วน ไม่ใช่ผิดหรือถูกเพียงสองสถานะ แต่จะเป็นดีกรีของความถูกหรือผิด ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติอยู่แล้ว

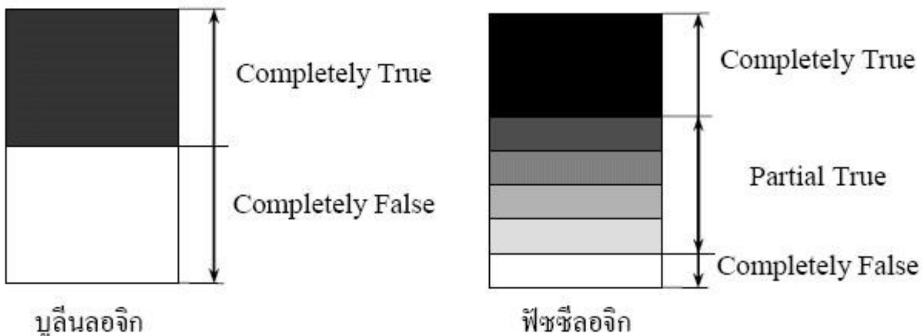
สำหรับข้อเสียของระบบฟัซซีก็คือ ไม่มีกระบวนการเรียนรู้ในการปรับแต่งโครงสร้างซึ่งกฎและตัวแปรต่าง ๆ ในตัวระบบเอง โครงสร้างของระบบจะถูกกำหนดโดยผู้เชี่ยวชาญในโดเมนที่กำลังพิจารณาร่วมกับนักเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น ถ้าหากต้องการสร้างระบบเพื่อการวิเคราะห์โรคมะเร็ง แพทย์ผู้เชี่ยวชาญด้านโรคมะเร็งจะต้องเป็นผู้กำหนดกฎและตัวแปรต่าง ๆ ของระบบ และนอกจากนั้นแพทย์ผู้เชี่ยวชาญต้องตรวจสอบประเมินความถูกต้องของระบบ ซึ่งบ่อยครั้งในการสร้างระบบฟัซซีอาจไม่มีผู้เชี่ยวชาญในโดเมนดังกล่าว การสร้างระบบจึงอาจไม่สัมฤทธิ์ผล การที่ระบบฟัซซีไม่มีกระบวนการเรียนรู้ด้วยตนเองจึงถือเป็นข้อด้อย แต่อย่างไรก็ตามปัจจุบันนักวิจัยได้มีการใส่กระบวนการเรียนรู้เข้าไปในระบบฟัซซีโดยอาศัยทฤษฎีการเรียนรู้ของโครงข่ายประสาทเทียม

โครงข่ายประสาทเทียมมีจุดเด่นด้านการเรียนรู้จากข้อมูล โครงข่ายประสาทเทียมมีการปรับแต่งความรู้ที่ซ่อนอยู่ภายในเครือข่ายที่มีการต่อเชื่อมโยงกันอย่างหนาแน่น มีการส่งผ่านข้อมูลที่จะประมวลผลจากอินพุตไปยังเอาต์พุตแบบขนาน การประมลผลของโครงข่ายประสาทเทียมจึงเป็นไปอย่างรวดเร็ว แต่ถึงอย่างไรก็ตาม โครงข่ายประสาทเทียมก็มีจุดด้อยในด้านการตีความหาเหตุผลโครงข่ายประสาทเทียม ไม่สามารถให้เหตุผลได้ว่าเพราะเหตุใดจึงมีข้อสรุปออกมาดังที่ปรากฏที่เอาต์พุตของโครงข่าย จุดด้อยข้อนี้เป็นที่รู้จักกันดีในนาม “black box” หรือกล่องดำ จากข้อดีของฟัซซี ในด้านการให้เหตุผลเยี่ยงมนุษย์และข้อดีโครงข่ายประสาทเทียมด้านการเรียนรู้จากข้อมูล เมื่อนำสองศาสตร์นี้มารวมกันจะกลายเป็นโครงข่ายประสาทเทียมแบบฟัซซี ซึ่งเป็นระบบที่กระบวนการเรียนรู้ในตัวเอง และโครงสร้างของระบบสามารถตีความหมายและให้เหตุผลได้เช่นเดียวกับระบบฟัซซี

แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับฟัซซีลอจิก

พื้นฐานแนวคิดแบบฟัซซี

ตรรกะแบบฟัซซี(fuzzy logic) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการตัดสินใจภายในใต้ความไม่แน่นอนของข้อมูลโดยยอมให้มีความยืดหยุ่นได้ ใช้หลักเหตุผลที่คล้ายการเลียนแบบวิธีความคิดที่ซับซ้อนของมนุษย์ ฟัซซีลอจิกมีลักษณะที่พิเศษกว่าตรรกะแบบจริงเท็จ (Boolean logic) เป็นแนวคิดที่มีการต่อขยายในส่วนของความจริง(partial true) โดยค่าความจริงจะอยู่ในช่วงระหว่างจริง (completely true) กับเท็จ (completely false) ส่วนตรรกศาสตร์เดิมจะมีค่าเป็นจริงกับเท็จเท่านั้น แสดงดังภาพที่ 2-1



ภาพที่ 2-1 ตรรกะแบบจริงเท็จ (บูลีนลอจิก) กับตรรกะแบบฟัซซี (ฟัซซีลอจิก)

ความเป็นฟัซซี (fuzziness) มีชื่อเรียกว่า มัลติวาลานซ์ (multivalance) ซึ่งมีค่าที่ความเป็นสมาชิกมากกว่า 2 ค่า และแตกต่างกับไบวาลานซ์ (bivalance) ที่มีความเป็นสมาชิกเพียง 2 ค่า ฟัซซีเซต (Fuzzy set) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สื่อถึง "ความไม่แน่นอน (uncertainty)" สามารถที่ไม่ใช่ เพียง 2 กรณี ซึ่งหากกำหนดว่า คนที่อ้วนคือคนที่มีน้ำหนักมากกว่า 75 กิโลกรัม คอมพิวเตอร์จะให้ผลว่าคนที่มีน้ำหนัก 74.50 กิโลกรัม ไม่จัดเป็นคนที่อ้วน จะสร้างและกำหนดรูปแบบ (modeling) ของลักษณะความไม่แน่นอนที่เป็นความคลุมเครือ ความไม่ตายตัว รวมถึงความขาดข้อมูลบางส่วน โดยทฤษฎีของฟัซซีเซตจะใช้ลักษณะความหมายตัวแปร (linguistic) มากกว่าปริมาณ (quantitative) ของตัวแปร เช่น การหาความหมายของ "คนที่อ้วน" เราไม่สามารถนิยามค่าความอ้วนที่ตรงกันและระบุเป็นหนึ่งเดียว (identical) สำหรับคนที่อ้วน นาย ก. จะให้ความหมายของ "คนอ้วน" หมายถึงคนที่มีน้ำหนักมากกว่า 70 กิโลกรัม นาย ข. ให้ความหมายว่าเป็นคนที่มีน้ำหนักมากกว่า 75 กิโลกรัม ซึ่งทั้งสองคนต่างแสดงความหมายของคำว่าคนที่อ้วนโดยเปรียบเทียบและในมุมมองของตัวเองตามน้ำหนักของตน ในการทำงานในมุมมองแบบฐานสอง (Binary sense) จะได้ผลเป็น ใช่ หรือ แต่จะเห็นว่าบุคคลนี้เป็นคนอ้วนน้ำหนักเกือบจะ 75 กิโลกรัม และถึงแม้ว่าบุคคลนี้จะมีน้ำหนัก 75 กิโลกรัม แต่

หากพิจารณาจากกลุ่มคนที่มีน้ำหนักเฉลี่ย 90 กิโลกรัม บุคคลนี้ก็จะไม่จัดอยู่ในกลุ่มคนที่อ้วน แสดงให้เห็นว่า ความอ้วนไม่ได้มีลักษณะความไม่แน่นอนแบบสุ่ม จากการศึกษาปัญหาทั่ว ๆ ไปจะแสดงถึงรูปแบบลักษณะการกระจายของปัญหา

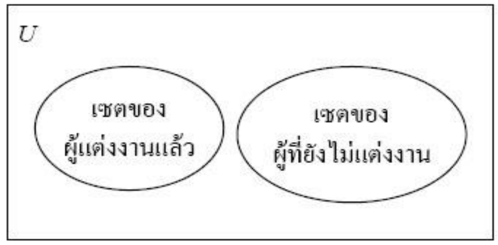
ภาพที่ 2-2 เป็นการแสดงให้เห็นว่าแนวทางในการตัดสินใจของปัญหาทั้งหมดมีเพียงส่วนน้อยที่เป็นสิ่งที่แน่นอน (certainty) ที่เหลือคือสิ่งที่ไม่แน่นอนซึ่งประกอบด้วยความไม่แน่นอนที่มีลักษณะแบบสุ่ม และความไม่แน่นอนที่มีลักษณะเป็นฟัซซี หรือคลุมเครือ ซึ่งมีมากกว่าร้อยละ 40 เพราะปัญหาส่วนมากเกี่ยวข้องกับการตัดสินใจของมนุษย์ซึ่งจะตัดสินใจตามพื้นฐานความคิดของตนเป็นหลัก

ภาพที่ 2-2 ความไม่แน่นอน (uncertainty)

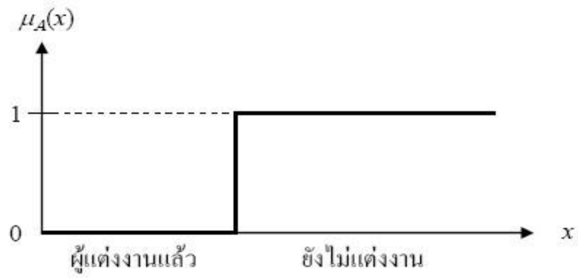
ฟัซซีจะสร้างวิธีทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงความคลุมเครือ ความไม่แน่นอนของระบบที่เกี่ยวข้องกับความคิดความรู้สึกของมนุษย์ เมื่อพิจารณาส่วนประกอบต่าง ๆ ในความไม่แน่นอนเพื่อกำหนดเงื่อนไขในการตัดสินใจ (Decision making) โดยอาศัยเซตของความไม่เป็นสมาชิก (Set membership)

เซตแบบฉบับ

ในเซตแบบฉบับ (classical set) หรือเซตทวินัย (crisp set) เป็นเซตที่มีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 0 หรือ 1 {0, 1} เท่านั้น เซตในทฤษฎีเซตแบบฉบับจะมีขอบเขตแบบแข็ง (sharp boundary) ซึ่งเป็นขอบเขตที่ตัดขาดจากกันแบบทันทีทันใด เซตแบบฉบับมีการกำหนดค่าความเป็นสมาชิกตามแนวคิดเลขฐานสอง โดยที่ตัวแปรหนึ่ง ๆ จะมีค่าความเป็นสมาชิกเพียงสองค่า คือ 0 ไม่เป็นสมาชิก และ 1 เป็นสมาชิก ตัวอย่างเช่น เซตของคู่แต่งงาน จะสามารถบอกได้ว่าอย่างแน่ชัดว่าเป็นกลุ่มผู้แต่งงานหรือไม่แต่งงาน



ภาพที่ 2-3 ตัวอย่างเซตแบบฉบับ



ภาพที่ 2-4 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในเซตผู้ที่ไม่แต่งงาน

ภาพที่ 2-3 แสดงตัวอย่างของเซตย่อยสองเซต คือเซตของผู้ที่แต่งงานและเซตของผู้ที่ไม่แต่งงาน จะเห็นได้ว่าคนหนึ่งคนจะเป็นสมาชิกภาพได้เพียงเซตเดียวเท่านั้น แต่งงานหรือไม่แต่งงาน ในภาพที่ 2-4 แสดงฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของเซตผู้ที่ไม่แต่งงาน จากภาพจะเห็นได้ว่า ผู้ที่แต่งงานแล้วจะมีค่าความเป็นสมาชิกในเซตของผู้ไม่แต่งงานเป็น 0 ส่วนผู้ที่ไม่แต่งงานมีค่าความเป็นสมาชิกภาพของเซตผู้ที่ไม่แต่งงานเป็น 1 ค่าความเป็นสมาชิกของทั้งสองเซตจะตัดขาดจากกันอย่างทันทีทันใด รูปแบบคณิตศาสตร์ของเซตแบบฉบับมีรูปดังนี้

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

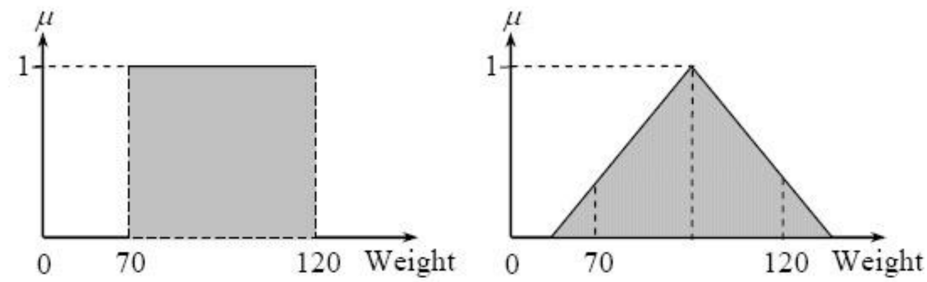
เมื่อ A เป็นเซตแบบฉบับหรือเซตแบบทวินัย x เป็นสมาชิกในเซต μ_A เป็นค่าความเป็นสมาชิกในเซต และ $\mu_A(x)$ เป็นฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในเซต A

ฟัซซีเซต

ฟัซซีเซต (Fuzzy Set) เป็นเซตที่มีขอบเขตที่ราบเรียบ ทฤษฎีฟัซซีเซตจะครอบคลุมทฤษฎีเซตแบบฉบับ โดยฟัซซีเซตยอมให้มีค่าความเป็นสมาชิกของเซตระหว่าง 0 และ 1 ในโลกแห่งความเป็นจริงเซตไม่ใช่มีเฉพาะเซตแบบฉบับเท่านั้น จะมีเซตแบบฟัซซีด้วย ฟัซซีเซตจะมีขอบเขตแบบฟัซซีไม่ใช่เปลี่ยนแปลงทันทีทันใดจากขาวเป็นดำ ตัวอย่างเช่น เซตของคู่แต่งงานที่มีความสุข จะเห็นได้ว่า

สมาชิกในเซตนี้จะไม่มีเฉพาะคู่แต่งงานที่มีความสุขระดับเดียวกันหมด บางคู่จะมีความสุขมาก บางคู่มีความสุขน้อย แตกต่างกันไป การใช้เซตแบบดั้งเดิมจึงไม่เหมาะสม

ยกตัวอย่างเกี่ยวกับความอ้วน นิยามคำว่าคนอ้วนในเซตทวินัยอาจกำหนดเป็นคนที่มีน้ำหนักตั้งแต่ 70 ถึง 120 กิโลกรัม โดยนิยามแบบฟัซซีเซตอาจกำหนดเป็นคนที่มีความอ้วนประมาณ 80 กิโลกรัม ซึ่งเป็นการให้นิยามที่ไม่แสดงถึงขอบเขตที่แน่นอน



ภาพที่ 2-5 การกำหนดค่าความเป็นสมาชิกของเซตทวินัยและเซตแบบฟัซซี

นิยามของฟัซซีเซต กำหนดให้ *X* เป็นเซตที่ไม่ว่าง ฟัซซีเซต *A* สามารถแสดงลักษณะเฉพาะได้จากฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) : X \rightarrow [0,1]$$

เมื่อ $\mu_{\underline{A}}$ สามารถตีความเป็นค่าของความเป็นสมาชิกภาพของตัวประกอบ *x* ในฟัซซีเซต $\underline{A}$ สำหรับแต่ละ (อ่านว่า “*x* เป็นสมาชิกของ *X*”) ฟัซซีเซต สามารถเขียนเป็นเซตของคู่ลำดับ (tuples)

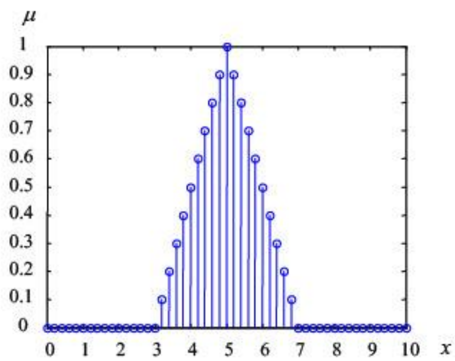
$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \right) \mid x \in X \right\}$$

เมื่อ $\underline{A}$ หมายถึงฟัซซีเซต $\underline{A}$ *x* หมายถึงสมาชิกของเซต (set membership) $\mu_{A(}$ หมายถึง ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (membership function) μ (x) บางครั้งแทนด้วย$\underline{A}(x)$ *X* หมายถึงเอกภพ สัมพัทธ์ (universe) หรือประชากร

ถ้า $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ เป็นเซตจำกัด และ $\underline{A}$ เป็นฟัซซีเซตใน *X* ซึ่งเป็นชนิดวิยุต (discrete) และจำกัด สัญกรณ์ (notation) ของฟัซซีเซต เขียนได้เป็น

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{x_i} \right\}$$

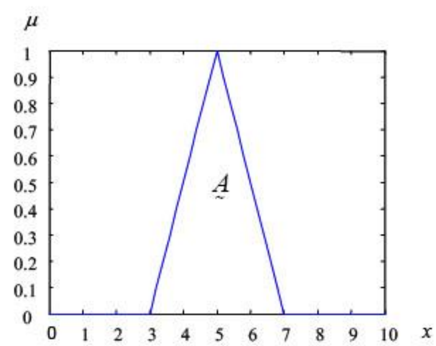
เมื่อพจน์ $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)/x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ หมายถึงค่าความเป็นสมาชิก $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ ของ x_i ในเซต $\underset{\sim}{A}$ และเครื่องหมายบวก "+" หมายถึงยูเนียน (union)



ภาพที่ 2-6 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของเซตฟัซซีแบบวิยุต $\underset{\sim}{A}$

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ *X* เป็นต่อเนื่อง (continuous) สัญกรณ์ (notation) ของฟัซซีเซต A เขียนได้เป็น

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \int \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{x} \right\}$$



ภาพที่ 2-7 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของเซตฟัซซีแบบต่อเนื่อง $\underset{\sim}{A}$

ทฤษฎีฟัซซีเซตสามารถแก้ปัญญาข้อจำกัดของเซตแบบดั้งเดิมได้ โดยฟัซซีเซตยอมให้มีค่าหรือดีกรีของความเป็นสมาชิก (degree of membership) ซึ่งแสดงด้วยค่าตัวเลขระหว่าง 0 และ 1 หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ [0, 1], โดย 0 หมายถึง ไม่เป็นสมาชิกในเซต 1 หมายถึง เป็นสมาชิกในเซต และค่าระหว่าง 0 กับ 1 เป็นสมาชิกบางส่วนในเซต การทำเช่นนี้ ทำให้เกิดความราบเรียบในการเปลี่ยนจากพื้นที่นอกเซตไปอยู่ในเซตของสมาชิกต่าง ๆ โดยมีฟังก์ชันสมาชิก (membership function) เป็นฟังก์ชันจัดเทียบ (mapping function) วัตถุในโดเมนใด ๆ ให้เป็นค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต ความเป็นสมาชิกสำหรับฟัซซีเซต มีจำนวนระดับความเป็นสมาชิกเป็นอนันต์ คือค่าต่อเนื่องในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 1 ซึ่งครอบคลุมการกำหนดสมาชิกแบบฉบับ และเซตแบบฉบับหรือเซตทวินัย (crisp set) จะกำหนดตามดังสมการที่ (2-6)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

เมื่อ A เป็นเซตแบบฉบับหรือเซตแบบทวินัย x เป็นสมาชิกในเซต μ_A เป็นค่าความเป็นสมาชิกในเซต และ $\mu_A(x)$ เป็นฟังก์ชันความเป็นสมาชิกในเซต A

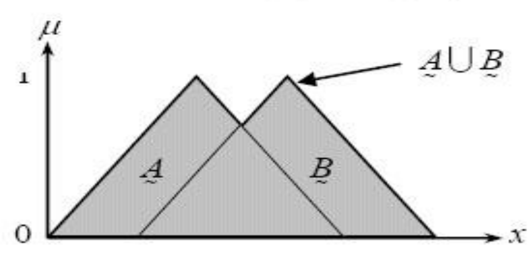
การดำเนินการทางฟัซซีเซต

การดำเนินการของฟัซซีเซตมีคุณสมบัติเหมือนกับเซตโดยทั่วไป มีการดำเนินการ (operation) คือ Union Intersection และ Complement

1. ยูเนียน (Union) ของฟัซซีเซต จะเป็น OR operation ในสมการ และ ภาพที่ 2-8

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

$$= \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$$

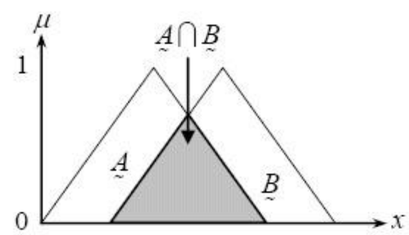


ภาพที่ 2-8 ยูเนียนของฟัซซีเซต $\underset{\sim}{A}$ และ $\underset{\sim}{B}$

2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection) ของฟัซซีเซต จะเป็น AND operation ในสมการ และภาพที่ 2-9

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

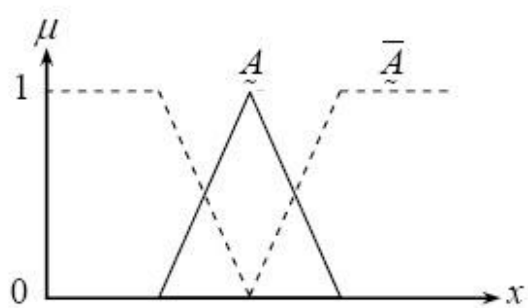
$$= \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$$



ภาพที่ 2-9 Intersection ของฟัซซีเซต $\underset{\sim}{A}$ และ $\underset{\sim}{B}$

3. คอมพลีเมนต์ (Complement) ของฟัซซีเซต ในสมการและภาพที่ 2-10

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$



ภาพที่ 2-10 Complement ของฟัซซีเซต $\underset{\sim}{A}$

คุณสมบัติของเซตฟัซซี

เซตฟัซซีมีคุณสมบัติตามเซตแบบฉบับ ได้แก่

Commutativity $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$

Associativity $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C}$

$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C}$

Distributivity $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$

Idemptency $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ และ $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

Identity $\underset{\sim}{A} \cup 0 = \underset{\sim}{A}$ และ $\underset{\sim}{A} \cap X = \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cap 0 = 0$ และ $\underset{\sim}{A} \cup X = X$

Transitivity ถ้า $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C}$ แล้ว $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{C}$

Involution $\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}} \subseteq \underset{\sim}{A}$

ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (membership function) เป็นฟังก์ชันที่มีการกำหนดระดับความเป็นสมาชิกของตัวแปรที่ต้องการใช้งาน โดยเริ่มจากการแทนที่กับตัวแทนที่มีความไม่ชัดเจน ไม่แน่นอน และคลุมเครือ ดังนั้นส่วนที่สำคัญต่อคุณสมบัติหรือการดำเนินการของฟัซซี เพราะรูปร่างของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีความสำคัญต่อกระบวนการคิดและแก้ไขปัญหา โดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกจะไม่สมมาตรกันหรือสมมาตรกันทุกประการก็ได้

ชนิดของฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

ชนิดของฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่ใช้งานทั่วไปมีหลายชนิด แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียงบาง 6 ชนิดดังนี้

1. ฟังก์ชันสามเหลี่ยม (triangular membership function)

ฟังก์ชันสามเหลี่ยมมีทั้งหมด 3 พารามิเตอร์คือ $\{a, b, c\}$

$$triangular(x:a,b,c)=\begin{cases}0 & x<a\\(x-a)/(b-a) & a\le x\le b\\(c-x)/(c-b) & b\le x\le c\\0 & x>c\end{cases}$$

2. ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal membership function)

ฟังก์ชันสี่เหลี่ยมคางหมูมีทั้งหมด 4 พารามิเตอร์คือ {*a*, *b*, *c*, *d*}

$$trapezoidal(x:a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x<a\\(x-a)/(b-a) & a\le x<b\\1 & b\le x<c\\(d-x)/(d-c) & c\le x<d\\0 & x\ge d\end{cases}$$

3. ฟังก์ชันเกาส์เซียน (Gaussian membership function)

ฟังก์ชันเกาส์เซียนมีทั้งหมด 2 พารามิเตอร์คือ {m, σ} ซึ่ง m หมายถึงค่าเฉลี่ย และ σ หมายถึง ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$guassian(x:m,\sigma)=\exp\left(-\frac{(x-m^2)}{\sigma^2}\right)$$

4. ฟังก์ชันระฆังคว่ำ (Bell-shaped membership function)

ฟังก์ชันรูประฆังคว่ำมีพารามิเตอร์ทั้งหมด 3 ค่าคือ {*a*, *b*, *c*}

$$bell-shaped(x:a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

5. ฟังก์ชันตัวเอส (Smooth Membership Function)

ฟังก์ชันรูปตัวเอสมีพารามิเตอร์ทั้งหมด 2 ค่าคือ {*a*, *b*}

$$S(x:a,b)=\begin{cases} 0 & x<a \\ 2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2}\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

6. ฟังก์ชันตัวแซด (Z-membership function)

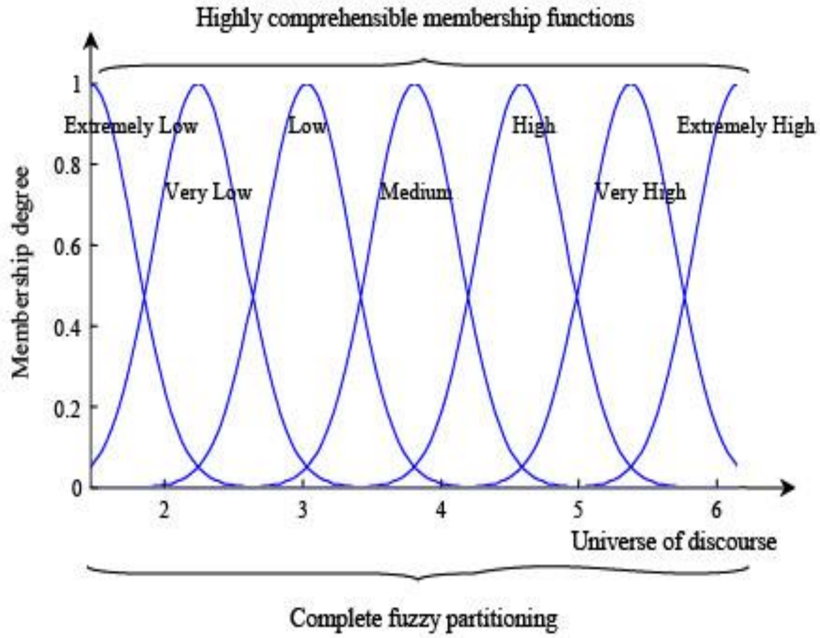
ฟังก์ชันรูปตัวเอสมีพารามิเตอร์ทั้งหมด 2 ค่าคือ $\{a, b\}$

$$Z(x:a,b)=\begin{cases} 1 & x<a \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ 2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2}\le x<b \\ 0 & x\ge b \end{cases}$$

การเลือกฟังก์ชันของความเป็นสมาชิก จะต้องเลือกตามความเหมาะสมความครอบคลุมของข้อมูลที่จะรับเข้ามา โดยสามารถที่ทับซ้อนกันเพื่อให้การดำเนินงานราบเรียบ ซึ่งมีความเป็นสมาชิกหลายค่าได้ และฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเปลี่ยนแปลงแก้ไขให้เหมาะกับงานที่กำลังปฏิบัติงานหรือตามความต้องการ

ตัวแปรภาษา (linguistic variable)

เซตแบบฟัซซีสามารถประยุกต์ใช้ในการอธิบายค่าของตัวแปรเช่นเดียวกับเซตแบบดั้งเดิม เช่น ประโยค “อุณหภูมิในห้อง**เย็น**” คำว่า “เย็น” เป็นคำที่ใช้แสดงปริมาณอุณหภูมิ ในทางรูปนัย สามารถเขียนได้เป็น **ปริมาณอุณหภูมิ ในห้อง เย็น** หรือ **TemperatureQuantity is Cold** ตัวแปร TemperatureQuantity เป็น**ตัวแปรภาษา** (linguistic variable) ซึ่งเป็นแนวคิดที่สำคัญมากในตรรกะแบบฟัซซี ตัวแปรภาษาช่วยกำหนดค่าของสิ่งที่จะอธิบายทั้งในรูป**คุณภาพ** โดยใช้**พจน์ภาษา** (linguistic term) และในรูป**ปริมาณ** โดยใช้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (membership function) ซึ่งแสดงความของของเซตแบบฟัซซี พจน์ภาษาใช้สำหรับการแสดงแนวคิดและองค์ความรู้ในการสื่อสารของมนุษย์ ส่วนฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีประโยชน์ในการจัดการกับอินพุตที่เป็นข้อมูลเชิงตัวเลข

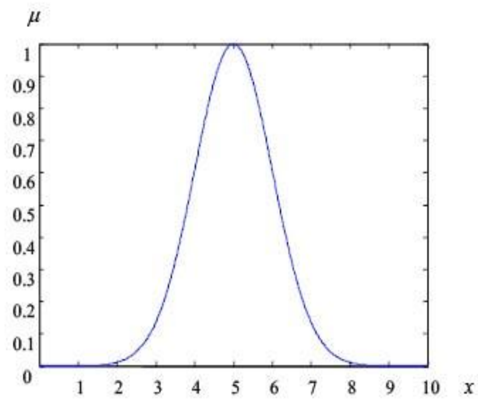


ภาพที่ 2-22 ตัวอย่างตัวแปรภาษา

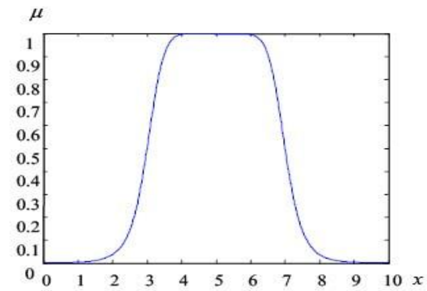
ตัวแปรภาษาเป็นการประกอบกัน (composition) ของตัวแปรสัญลักษณ์ (symbolic variable) และตัวแปรเชิงเลข (numerical variable) ตัวอย่างตัวแปรสัญลักษณ์ เช่น “รูปร่าง เป็นทรงกระบอก” (Shape = Cylinder) คำว่า “รูปร่าง” เป็นตัวแปรที่บอกถึงรูปร่างของวัตถุ ตัวอย่างตัวแปรเชิงเลข เช่น “ความสูงเท่ากับ 4 ฟุต” (Height = 4') ตัวแปรเชิงเลขจะมีใช้กันในสาขางานด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ คณิตศาสตร์ การแพทย์ และอื่น ๆ ส่วนตัวแปรสัญลักษณ์มีความสำคัญในวิทยาการเกี่ยวกับปัญญาประดิษฐ์และการตัดสินใจ การใช้ตัวแปรภาษาเป็นการรวมตัวแปรเชิงเลขกับตัวแปรสัญลักษณ์เข้าด้วยกัน ภาพที่ 2-22 แสดงตัวอย่างเซตตัวแปรภาษาของเซตฟัซซี ได้แก่ Extremely Low, Very Low, Low, Medium, High, Very High และ Extremely High

กฎฟัซซี (fuzzy rules)

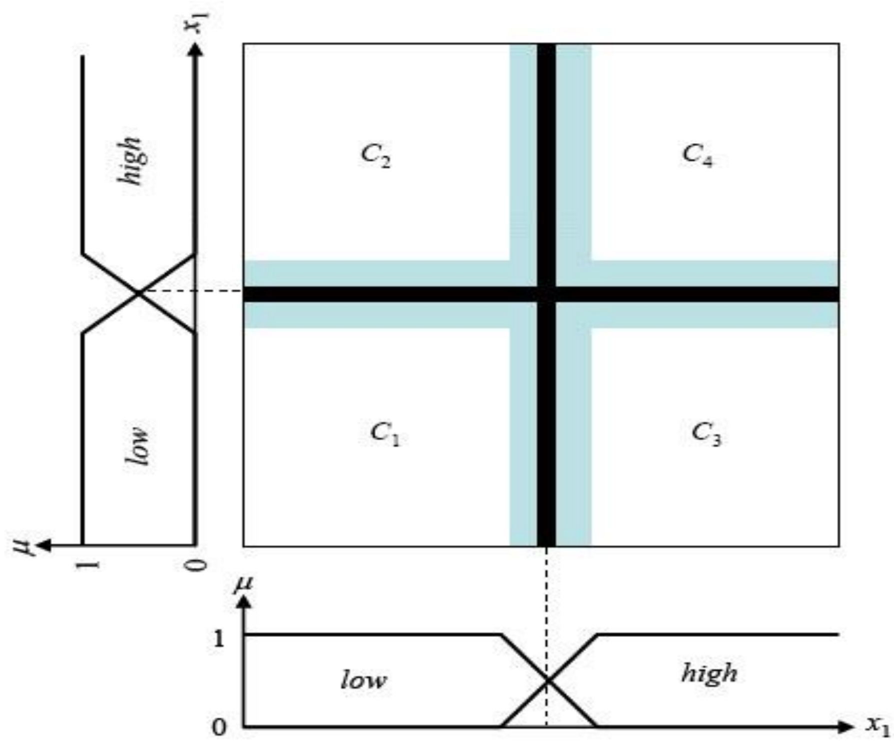
วิทยาการเกี่ยวกับฟัซซีลอจิกมีจำนวนมาก แต่ที่นิยมและการประยุกต์ใช้งานมากที่สุดเห็นจะได้แก่ กฎฟัซซีแบบถ้า-แล้ว (fuzzy if-then rule) ตัวอย่างการใช้กฎในการแยกกลุ่มดังภาพที่ 2-18 ในภาพที่ 2-19 แสดงปริภูมิรูปแบบ (pattern space) การจัดกลุ่มด้วยกฎฟัซซี



ภาพที่ **2-18** ฟังก์ชันเกาส์เซียน



ภาพที่ **2-19** กราฟของฟังก์ชันระฆังคว่ำ



ภาพที่ 2-23 ตัวอย่างปริภูมิรูปแบบการจัดกลุ่มด้วยกฎฟัซซี

จากภาพที่ 2-23 สามารถเขียนเป็นกฎในรูปประโยคภาษาได้ดังนี้

กฎข้อ 1: ถ้า x_1 มีค่า *low* และ x_2 มีค่า *low* แล้ว ข้อมูล (x_1, x_2) เป็นกลุ่ม C_1

กฎข้อ 2: ถ้า x_1 มีค่า *low* และ x_2 มีค่า *high* แล้ว ข้อมูล (x_1, x_2) เป็นกลุ่ม C_2

กฎข้อ 3: ถ้า x_1 มีค่า *high* และ x_2 มีค่า *low* แล้ว ข้อมูล (x_1, x_2) เป็นกลุ่ม C_3

กฎข้อ 4: ถ้า x_1 มีค่า *high* และ x_2 มีค่า *high* แล้ว ข้อมูล (x_1, x_2) เป็นกลุ่ม C_4

เมื่อ x_1 เป็นตัวแปรภาษาในมิติที่ 1, x_2 เป็นตัวแปรภาษาในมิติที่ 2, *low* และ *high* เป็นพจน์ภาษา (linguistic terms), ข้อมูล (x_1, x_2) เป็นคู่ลำดับของวัตถุที่ต้องการจัดกลุ่ม และ C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นกลุ่มข้อมูล 1, 2, 3 และ 4

สมมุติให้กฎข้อ l, l = 1, 2, …, L เป็นลำดับของกฎ ให้ข้อมูลเป็น $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ เมื่อ n เป็นจำนวนมิติของข้อมูล ให้ A_{li} เป็นพจน์ภาษาในกฎข้อที่ l มิติที่ i และให้กลุ่มข้อมูลเป็น C_k, k = 1, 2, …, K รูปแบบทั่วไปของกฎฟัซซีสามารถเขียนได้ดังนี้

กฎข้อ 1: ถ้า x_1 มีค่า A_{11} และ x_2 มีค่า A_{12} และ ⋯ และ x_n มีค่า A_{1n} แล้ว ข้อมูล $\mathbf{x}$ เป็นกลุ่ม C_1

กฎข้อ 2: ถ้า x_1 มีค่า A_{21} และ x_2 มีค่า A_{22} และ ⋯ และ x_n มีค่า A_{2n} แล้ว ข้อมูล $\mathbf{x}$ เป็นกลุ่ม C_2

กฎข้อ *l*: ถ้า x_1 มีค่า A_{l1} และ x_2 มีค่า A_{l2} และ ⋯ และ x_n มีค่า A_{ln} แล้ว ข้อมูล $\mathbf{x}$ เป็นกลุ่ม C_k

ความสัมพันธ์แบบฟัซซี

ผลคูณคาร์ทีเซียน

เลขลำดับแบบจัดอันดับมีตัวประกอบ n ค่า ที่เขียนในรูป $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ เรียกว่า **เอ็น-ทูเปิลแบบจัดอันดับ** (an ordered n-tuple) ส่วน**เอ็น-ทูเปิลแบบไม่จัดอันดับ**มีตัวประกอบ n ค่าที่ไม่จัดอันดับสำหรับเซตทวินัย (crisp set) $\boldsymbol{A_1,A_2,\ldots,A_n}$, เซตของ n-tuple ทั้งหมด $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ เมื่อ $a_1 \in \boldsymbol{A_1}$,…, และ $a_n \in \boldsymbol{A_n}$ เราเรียก $\boldsymbol{A_1 x A_2 x,\ldots,x A_n}$ ว่า**ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product)ของ $\boldsymbol{A_1,A_2,\ldots,A_n}$ ถ้า $\boldsymbol{A_1,A_2,\ldots,A_n}$ เป็นตัวเดียวกันทั้งหมดผลคูณคาร์ทีเซียนจะเท่ากับ A^xผลคูณคาร์ทีเซียนจะแตกต่างจากการคูณทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 3-1 กำหนดให เซต $A = \{0,1\}$ และ $B = \{a,b,c\}$ จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตทั้งสองในรูปแบบต่าง ๆ

วิธีทำ

$$A \times B = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$$

$$B \times A = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$B \times B = B^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

ความสัมพันธ์แบบฉบับ

เซตย่อย (supset) ของผลคูณคาร์ทีเซียน $\boldsymbol{A_1 x A_2 x,\ldots,x A_n}$ เราเรียกว่าความสัมพันธ์ n-ary บน $\boldsymbol{A_1,A_2,\ldots,A_n}$ ในกรณี $n = 2$ เราเรียกว่า**ความสัมพันธท์ วิภาค** (binary relation) จาก $\boldsymbol{A_1}$ ไปยัง $\boldsymbol{A_2}$แต่ถ้า $n = 3$ จะเรียกว่าความสัมพันธ์ไตรภาค (ternary relation) $n = 4$ จะเรียกว่าความสัมพันธ์ฐานสี่(quaternary relation) และ $n = 5$ จะเรียกว่าความสัมพันธ์ฐานห้า (quinary relation) ต่อไปนี้เมื่อกล่าวถึงความสัมพันธ์จะหมายถึงความสัมพันธ์ทวิภาคผลคูณคาร์ทีเซียนของสองเอกภพสัมพัทธ์ X และ Y หาได้จาก

ผลคูณคาร์ทีเซียนของสองเอกภพสัมพัทธ์ X และ Y หาได้จาก

$$\boldsymbol{X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}}$$

ซึ่งเกิดเป็นคู่จัดอันดับของทุก ๆ $x \in X$ และ $y \in Y$ ทุก ๆ ตัวประกอบในเอกภพสัมพัทธ์ X ถูกทำให้สัมพันธ์กับทุกตัวประกอบของ Y ความแข็งแรงของความสัมพันธ์ระหว่างคู่อันดับของตัวประกอบในแต่ละเอกภพสัมพัทธ์ถูกวัดด้วยฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ χ

$$\chi_{X\times Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in X \times Y \\ 0, & (x,y) \notin X \times Y \end{cases}$$

$$\chi_R(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in X \times Y \\ 0, & (x,y) \notin X \times Y \end{cases}$$

การดำเนินการบนความสัมพันธ์ทวิภาค

นิยามให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์สองชุดบนเอกภพสัมพัทธ์คาร์ทีเซียน $X \times Y$ และให **0** เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีความสัมพันธ์ใด ๆ และ **E** เป็นเมทริกซ์ที่มีความสัมพันธ์เต็ม การดำเนินการบนความสัมพันธ์ทวิภาค มีดังนี้

ยูเนียน $R \bigcup S \rightarrow \chi_{R \cup S}(x,y) : \chi_{R \cup S}(x,y) = \max\left[\chi_R(x,y), \chi_S(x,y)\right]$

อินเตอร์เซกชัน $R \bigcap S \rightarrow \chi_{R \cap S}(x,y) : \chi_{R \cap S}(x,y) = \min\left[\chi_R(x,y), \chi_S(x,y)\right]$

ส่วนเติมเต็ม (complement) $\overline{R} \rightarrow \chi_{\overline{R}}(x,y) : \chi_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \chi_R(x,y)$

คอนเทนเมนต์ $R \subset S \rightarrow \chi_R(x,y) : \chi_R(x,y) \leq \chi_S(x,y)$

เอกลักษณ์ $\phi \rightarrow \mathbf{0}$ และ $X \rightarrow \mathbf{E}$

การจัดองค์ประกอบแบบทวิภาค (composition)

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ที่สัมพันธ์หรือจัดเทียบตัวประกอบจากเอกภพสัมพัทธ์ X ไปยังเอกภพสัมพัทธ์ Y และให้ S เป็นความสัมพันธ์ที่สัมพันธ์หรือจัดเทียบตัวอประกอบจากเอกภพสัมพัทธ์ Y ไปยังเอกภพสัมพัทธ์ Z มีการจัดองค์ประกอบ 2 รูปแบบที่นิยมใช้ ได้แก่ การจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและต่ำสุด (max-min composition) และ การจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและผลคูณ (maxproductหรือ max-dot composition)

การจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและต่ำสุด

$$T = R \circ S$$

$$\chi_T(x,y) = \bigvee_{y \in Y}\left(\chi_R(x,y) \wedge \chi_S(x,y)\right)$$

เมื่อ T เป็นความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบที่เหมือนกันในเอกภพสัมพัทธ์ X ที่มีอยู่ใน R ไปยังองค์ประกอบที่เหมือนกันในเอกภพสัมพัทธ์ Z ซึ่งมีอยู่ใน S

การจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและผลคูณ

$$T = R \circ S$$

$$\chi_T(x, y) = \bigvee_{y \in Y} \left(\chi_R(x, y) \bullet \chi_S(x, y) \right)$$

ความสัมพันธ์แบบฟัซซี

ในทำนองเดียวกันดับความสัมพันธ์ทวิภาค ความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นการจัดเทียบตัวประกอบของเอกภพสัมพัทธ์หนึ่ง เช่น X ยังเอกภพสัมพัทธ์หนึ่ง เช่น Y ผ่านผลคูณคาร์ทีเซียนของสองเอกภพสัมพัทธ์นั้น โดยความเข้มระหว่างคู่อันดับของทั้งสองเอกภพสัมพัทธ์วัดได้โดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแสดงในรูปดีกรีของความเข้มของความสัมพันธ์มีค่าระหว่าง [0, 1] นั่นคือ ความสัมพันธ์ฟัซซี*R*%เป็นการจัดเทียบจากปริภูมิคาร์ทีเซียน (Cartesian space) ace) $X \times Y$ เป็นค่าระหว่าง [0, 1] เมื่อความเข้มของการจัดเทียบ ถูกแสดงโดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกภาพของความสัมพันธ์สำหรับคู่อันดับจากสองเอกภพสัมพัทธ์ หรือ $\mu_{\underline{R}}$ (x,y)

การดำเนินการของความสัมพันธ์ฟัซซี

ยูเนียน $\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x, y) = \max\left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y) \right]$

อินเตอร์เซกชัน $\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x, y) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y) \right]$

ส่วนเติมเต็ม (complement) $\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$

คอนเทนเมนต์ $\underset{\sim}{R} \subset \underset{\sim}{S} \rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \le \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$

การจัดองค์ประกอบแบบฟัซซี (fuzzy composition)

ความสัมพันธ์ฟัซซีเป็นเซตแบบฟัซซีอย่างหนึ่ง เราสามารถนิยามผลคูณคาร์ทีเซียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสองเซตขึ้นไป

สมมุติให้ $\underline{A}$ เป็นเซตแบบฟัซซีบนเอกภพสัมพัทธ์ X และ $\underline{B}$ เป็นเซตแบบฟัซซีบนเอกภพสัมพัทธ์ Y ผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตแบบฟัซซี $\underline{A}$ และ $\underline{B}$ จะได้ผลเป็นความสัมพันธ์ฟัซซี $\underline{R}$ ซึ่งถูกบรรจุภายในปริภูมิผลคูณคาร์ทีเซียนเต็ม นั่นคือ.

$$\underline{\boldsymbol{A}} \times \underline{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{R}} \subset \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$$

เมื่อความสัมพันธ์ฟัซซี $\underline{R}$ มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}}(x,y) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right]$$

ผลคูณคาร์ทีเซียนที่ได้นี้คำนวณคล้ายวิธีคูณไขว้ของสองเวกเตอร์ (cross product) แต่ผลคูณคาร์ทีเซียนจะแตกต่างจากการคูณทางคณิตศาสตร์

การจัดองค์ประกอบแบบฟัซซี สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับความสัมพันธ์แบบทวิภาค สมมุติให้ $\underline{R}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบนปริภูมิคาร์ทีเซียน $X\,Y \times$ $\underline{S}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบนปริภูมิคาร์ทีเซียน $Y\,Z \times$ และ $\underline{T}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบนปริภูมิคาร์ทีเซียน $X \times$ Z การจัดองค์ประกอบฟัซซีแบบค่าสูงสุดและต่ำสุด (max-min composition) นิยามดังนี้

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x,z) = \bigvee_{y\in Y}\left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{S}}(y,z)\right)$$

และการจัดองค์ประกอบฟัซซีแบบค่าสูงสุดและผลคูณ สามารถนิยามเป็น

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x,z) = \bigvee_{y\in Y}\left(\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \bullet \mu_{\underset{\sim}{S}}(y,z)\right)$$

โปรดสังเกตว่า ทั้งการจัดองค์ประกอบแบบทวิภาคและแบบฟัซซี ไม่สามารถสลับที่ของ $\underline{R}$ และ $\underline{S}$ ได้ นั่นคือ

$$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S} \neq \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{R}$$

ทฤษฎีของการหาเหตุผลอย่างประมาณ

ซึ่งทฤษฎีนี้ได้นำเสนอโดย Zadeh เมื่อปี ค.ศ. 1979 โดยทฤษฎีนี้เป็นรูปแบบที่สำคัญสำหรับการให้เหตุผลจากสภาพแวดล้อมที่เกิดจากความคลุมเครือและไม่แน่นอน หัวใจหลักของทฤษฎีนี้ได้แก่การจัดองค์ประกอบของประโยคจากการใช้เซตแบบฟัซซีเป็นตัวแปร

ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์

ในตรรกะเชิงประพจน์ (Propositional logic) (1) ข้อความทั่วไปสามารถสร้างโดยการแสดงเป็นประโยคง่าย ๆ เป็นหน่วยเบื้องต้นเรียกว่า ประพจน์ (proposition) และ (2) การเชื่อมประพจน์กับตัวเชื่อมประโยคที่ซับซ้อน ได้แก่ ¬ “ไม่” (not), ∧ “และ” (and), “หรือ” (or), ⇒ “ส่อความ” (imply) ตัวอย่างเช่น ประโยค

If today is a weekday and the current time is rush hour, then the traffic is congested.

ถ้าวันที่เป็นวันทำงานและเวลาปัจจุบันเป็นชั่วโมงเร่งด่วนแล้วทำให้การจราจรติดขัด

สามารถแสดงด้วยการนิยามประพจน์สามประพจน์เป็น

P: today is a weekday (วันนี้เป็นวันทำงาน)

Q: the current time is during rush hour (เวลาปัจจุบันเป็นชั่วโมงเร่งด่วน)

R: the traffic is congested (การจราจรติดขัด)

ทั้งสามประพจน์สามารถเชื่อมกันด้วย “and” (และ) การส่อความ (implication) จะเป็น

$$P \wedge Q \Rightarrow \mathrm{R}$$

การส่อความวัตถุ (material implication)

กำหนดให้ p = “x is in A” and q = “y is in B” เป็นประพจน์ทวินัย (crisp propositions) เมื่อ A และ B เป็นเซตทวินัย

การส่อความ $p \rightarrow q$ สามารถตีความเป็น $\neg(\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q})$

p ขยายความ q (p entails q) หมายถึง จะไม่มีเหตุการณ์ที่ p เป็นจริง และ q ไม่เป็นจริง

ข้อความแบบตรรกะดั้งเดิมยอมให้มีค่าที่เป็นไปได้สองค่า คือ จริง (true) และ เท็จ (false) เนื่องจากตัวเชื่อมตรรกะถูกใช้งานเป็นสูตรย่อยหรือคู่ของสูตรย่อยซึ่งหมายความว่า ข้อความสามารถให้นิยามโดยการแสดงค่าจริงของสูตรผลลัพธ์ที่ซับซ้อนสำหรับการจัดหมู่ (combination) ของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของความจริงที่เป็นสูตรย่อย ตารางความจริง (truth table) ซึ่งเป็นตัวเชื่อมตรรกะดังแสดงในตารางที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 ตารางความจริงของตัวเชื่อมตรรกะ

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$
เท็จ	เท็จ	จริง	เท็จ	เท็จ	จริง
เท็จ	จริง	จริง	เท็จ	จริง	จริง
จริง	เท็จ	เท็จ	เท็จ	จริง	เท็จ
จริง	จริง	เท็จ	จริง	จริง	จริง

ตัวเชื่อมการส่อความนี้สำคัญมาก เนื่องจากเป็นพื้นฐานของกฎการส่อความแบบฟัซซี (fuzzy implication rule) การส่อความมี 2 ส่วน คือ **ข้อตั้ง** (premise) ซึ่งใช้คำว่า “ถ้า” (if) เป็นส่วนที่

นำหน้าคำเชื่อมการส่อความ และ**ข้อยุติ** หรือข้อสรุป (conclusion) ซึ่งใช้คำว่า “แล้ว” (then) ตามหลังตัวเชื่อมส่อความ

สิ่งหนึ่งที่สำคัญมากในการสรุปความหรือการอนุมานในตรรกะเชิงประพจน์ นั่นคือ โมดัสโพเนนส์ (modus ponens) กำหนดให้การส่อความและข้อตั้งเป็นจริง โมดัสโพเนนส์สามารถทำให้เรานิรมัยหรือชักเหตุได้ว่าข้อตามหรือพจน์หลัง (consequent) เป็นจริง

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

การสรุปความหรือการอนุมานในตรรกะเชิงประพจน์อีกอย่าง ได้แก่ โมดัสโทเลนส์ (modus tolens) จากการส่อความและข้อสรุปเชิงลบ เราสามารถทำการนิรมัยหรือชักเหตุได้ข้อตาม (พจน์หลัง) เป็นเชิงลบได้ดังนี้

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

แคลคูลัสภาคแสดงอันดับที่หนึ่ง

แคลคูลัสภาคแสดงอันดันที่หนึ่ง (fist-order predicate calculus: FOPC) ทำให้ประโยคเป็นเชิงภาษาทางการมากกว่าตรรกะเชิงประพจน์ โดยยินยอมให้มีการใช้ตัวแปรในข้อความตรรกะ ตัวแปรใน FOPC เป็นสิ่งสัมพันธ์กับตัวแบ่งปริมาณหนึ่งในสองตัว ได้แก่ ตัวแบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (universal quantifier, $\forall$) และตัวแบ่งปริมาณสำหรับตัวที่มีอยู่ (existential quantifier, $\exists$) ตัวแรกใช้สำหรับแสดงข้อความเกี่ยวกับวัตถุที่เป็นจริงทั้งหมด ส่วนตัวหลังใช้แสดงข้อความที่เป็นจริงสำหรับวัตถุอย่างน้อยหนึ่งอย่าง

แตกต่างจากตรรกะเชิงประพจน์ FOPC ใช้ภาคแสดง (predicate) เพื่ออธิบายประโยคง่าย ๆ ภาคแสดงใช้แสดงถึงเซตของวัตถุ (เช่น ภาคแสดง นักศึกษาไอที แสดงถึงเซตของนักศึกษาไอที) หรือความสัมพันธ์ (ภาคแสดง เพื่อน แสดงสัมพันธ์ภาพระหว่างบุคคลสองคน) ภาคแสดงมีจำนวนอาร์กิวเมนต์หลายตัวซึ่งอาจเป็นตัวแปรหรือค่างคงที่ก็ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของภาคแสดงพร้อมกับอาร์กิวเมนต์ที่เป็นค่าคงที่

นักศึกษาไอที(สมพงษ์): สมพงษ์เป็นนักศึกษาไอที
ITstudent(Sompong): Sompong is an IT student.

เวลาด่วน(5 โมงเย็น): ห้าโมงเย็นเป็นเวลาด่วน
RushHour(5 pm): Five o'clock in the afternoon is during rush hour.

เพื่อน(ญาดา, กิตติชัย): ญาดาและกิตติชัยเป็นเพื่อนกัน
Friend(Yada, Kittichai): Yada and Kittichai are friends.

เช่นเดียวกับตรรกะเชิงประพจน์ FOPC รวมนิพจน์เชิงตรรกะง่าย ๆ ให้เป็นนิพจน์ที่ซับซ้อนโดยการใช้ตัวเชื่อมตรรกะ ตัวอย่างเช่น ข้อความ "นักศึกษาไอทีทั้งหมดชอบศึกษาวิชาเกี่ยวกับระบบอัจฉริยะ" (All IT students like to study subjects involving intelligent systems) สามารถแสดงในระบบตรรกะแบบตรรกะภาคแสดงอันดับที่หนึ่ง ดังนี้

$\forall$ (x, y) ITstudent(x) $\wedge$ IntelligentClass(y) Like(x, y) $\Rightarrow$
เมื่อ x เป็นนักศึกษาไอที y เป็นวิชาเกี่ยวฐานข้อมูล Like เป็นภาคแสดง

กฎการอนุมานทั้งหมดในตรรกะเชิงประพจน์สามารถขยายเป็น FOPC โดยการหาตัวแทนที่เหมาะสมของตัวแปรโดยการใช้ขั้นตอนวิธีการสร้างเอกภาพ (unification algorithm) เช่น กำหนดให้ความจริงต่อไปนี้

ITstudent(Somsak)
IntelligentClass(Fuzzy)

โมดัสโพเนนส์สามารถประยุกต์ใช้โดยการแทนที่ตัวแปร x และ y ด้วย Somsak และ Fuzzy ตามลำดับ เป็น (Somsak, Fuzzy)

$$\begin{array}{l}\forall(x, y)\ \text{ITstudent}(x) \wedge \text{IntelligentClass}(y) \Rightarrow \text{Like}(x, y) \\ \text{ITstudent(Somsak)} \\ \text{IntelligentClass(Fuzzy)} \\ \hline \text{Like(Somsak, Fuzzy)} \qquad \phi = \{\text{Somsak}/x,\ \text{Fuzzy}/y\}\end{array}$$

เมื่อ f เป็นตัวแปรที่แทนขึ้นใหม่ ตัวแปรที่เป็นตัวแทนนี้เรียกว่าตัวสร้างเอกภาพ และขั้นตอนวิธีสำหรับการหาตัวแปรเหล่านี้เรียกว่าการสร้างเอกภาพ ข้อจำกัดของตรรกะแบบฉบับ (limitations of classical logic) ก็คือไม่สามารถแสดงและให้เหตุผลเกี่ยวกับองค์ความรู้แบบไม่แน่นอนได้ ตรรกะแบบคลุมเครือมีจุดมุ่งหมายในการสร้างตรรกะแบบฉบับในการแสดงความไม่แน่นอน

ตรรกะแบบคลุมเครือ

ข้อจำกัดของแคลคูลัสเชิงประพจน์แบบฉบับคือเป็นตรรกะ 2 ค่า การประพจน์แบบตรรกฟัซซีจะเกี่ยวกับแนวคิดตรรกะหลายค่าซึ่งมีขอบเขตแบบไม่ชัด (unclear defined boundary) ข้อความเชิงภาษาเป็นตัวแสดงแนวคิดเชิงจิตพิสัยซึ่งสามารถแปลความแบบแตกต่างไปเล็กน้อยจากบุคคลแต่ละคน ซึ่งเกี่ยวกับการประพจน์เชิงคลุมเครือ โดยธรรมชาติของภาษาทั่วไปเป็นแบบคลุมเครือ นั่นคือภาษาจะเกี่ยวข้องกับพจน์ที่ไม่ชัดเจน (vague) และไม่เที่ยงตรง (imprecise) ตัวอย่างเช่น ข้อความที่แสดงเกี่ยวกับความสูงหรือน้ำหนักของบุคคล หรือการแสดงเกี่ยวกับอายุของแต่ละบุคคล เป็นต้น

ข้อความในตรรกะแบบคลุมเครือจะตีความให้เป็นจริงบางส่วนหรือเป็นเท็จบางส่วน ไม่ใช่มีเฉพาะ "จริง" หรือ "เท็จ" อย่างในตรรกะแบบฉบับเท่านั้น ค่าความเป็นจริงเป็นค่าที่อยู่ในระหว่าง "0" ถึง "1"

จุดมุ่งหมายสำคัญของตรรกะแบบฟัซซีคือการที่สามารถให้อนุมานเชิงเหตุผล ถึงแม้ว่าเงื่อนไขของกฎการส่อความจะสอดคล้องกันเพียงบางส่วน ความสามารถนี้เราเรียกว่า**การให้เหตุผลอย่างประมาณ** (Approximate reasoning) การให้เหตุผลอย่างประมาณสามารถทำได้สองทาง ได้แก่ 1. การแสดงความหมายของกฎการส่อความแบบคลุมเครือด้วยความสัมพันธ์แบบคลุมเครือ (Fuzzy relation) และ 2. การรับข้อสรุปอนุมานด้วยการใช้กฎการจัดองค์ประกอบ (Compositional rule) ของการอนุมานไปยังความสัมพันธ์การส่อความแบบคลุมเครือ (fuzzy implication relation)

การส่อความแบบคลุมเครือ (fuzzy implication)

สมมุติให้ x และ y เป็นตัวแปรจำนวนเต็ม 2 ตัวแปร มีค่าระหว่าง [0, 10] หากเราทราบว่า "x เป็นค่าระหว่าง 1 และ 3" แล้ว "y เป็นได้ทั้ง 7 หรือ 8" องค์ความรู้นี้สามารถแสดงในอย่างน้อยสองรูปแบบ ได้แก่ 1. การส่อความตรรกะ และ 2. การแสดงข้อความเงื่อนไขในภาษาคอมพิวเตอร์เชิงดำเนินการ ทั้งสองวิธีมีความแตกต่างกัน สมมุติว่าเราทราบว่า x มีค่าเท่ากับ 5 การแสดงส่อควารเชิงตรรกะและการแสดงข้อความเงื่อนไขเชิงดำเนินการ จะเป็นดังนี้

กฎการส่อความ (การแสดงเชิงตรรกะ)

กำหนดให้: $x \in [1, 3] \quad \rightarrow \quad y \in [7, 8]$

$x \in 5$

ลงความเห็น: y ไม่ทราบค่า ($y \in [1, 10]$)

กฎการจัดเทียบ (การแสดงเชิงดำเนินการ)

ข้อความ: ถ้า $x \in [1, 3]$ แล้ว $y \in [7, 8]$ (If $x \in [1, 3]$ THEN $y \in [7, 8]$)

ค่าของตัวแปร: $x \in 5$

ผลการปฏิบัติ: ไม่มีปฏิกิริยา

การจัดองค์ประกอบแบบคลุมเครือ (fuzzy logic composition) ~ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับแนวคิดขอบเขตเชิงคลุมเครือ โดยใช้ข้อความภาษาเป็นตัวแสดงแนวคิดที่เป็นอัตวิสัยซึ่งสามารถตีความแตกต่างกันไปในแต่ละบุคคล และการส่อความเชิงคลุมเครือสามารถสรุปความได้จากหลากหลายวิธีของการจัดองค์ประกอบแบบคลุมเครือ

ค่าความเป็นจริง (truth value) ที่กำหนดให้ ~ เป็นค่าใด ๆ ก็ได้ในช่วง [0, 1] การกำหนดค่าให้ประพจน์ (proposition) เป็นการจัดเทียบจริงจากค่าในช่วง [0, 1] เป็นค่าในเอกภพสัมพัทธ์ (universe) U ของค่าความเป็นจริง T ดังสมการ

$$T : u \in U \rightarrow (0,1)$$

ในทำนองเดียวกันกับตรรกะแบบฉบับ เราสามารถกำหนดประพจน์เชิงตรรกะให้กับเซตในเอกภพของสรรพสาระ (Universe of discourse) ประพจน์แบบคลุมเครือเป็นการกำหนดให้เป็นเซตแบบคลุมเครือ (fuzzy set) สมมุติให้ประพจน์ ถูกกำหนดเป็นเซตแบบคลุมเครือแล้ว ค่าความเป็นจริง หาได้จากสมการ

$$T(\underset{\sim}{P}) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \qquad \text{เมื่อ } 0 \leq \mu_{\underset{\sim}{A}} \leq 1$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าดีกรีของความเป็นจริงสำหรับประพจน์ $P : x \in A$ เท่ากับระดับค่าความเป็นสมาชิกภาพของ x ในเซตแบบฟัซซี $\underline{\boldsymbol{A}}$

ตัวเชื่อมเชิงตรรกะของการปฏิเสธหรือนิเสธ (negation) การเลือก (disjunction) การเชื่อมหรือสันธาน (conjunction) และการส่อความหรือความหมายโดยนัย (implication) จะเป็นนิยามของตรรกะเชิงคลุมเครือ สำหรับประพจน์อย่างง่ายสองประพจน์ ได้แก่ ประพจน์ $\underline{\boldsymbol{P}}$ นิยามบนเซตแบบคลุมเครือ $\underline{\boldsymbol{A}}$ และประพจน์ $\underline{\boldsymbol{Q}}$ นิยามบนเซตแบบคลุมเครือ $\underline{\boldsymbol{B}}$ ตัวเชื่อมเหล่านี้แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

การปฏิเสธหรือนิเสธ (negation)

$$T(\bar{\underset{\sim}{P}}) = 1 - T(\underset{\sim}{P})$$

การเลือก (disjunction)

$$\underset{\sim}{P} \vee \underset{\sim}{Q} : x \text{ is } \underset{\sim}{A} \text{ or } \underset{\sim}{B} \qquad T(\underset{\sim}{P} \vee \underset{\sim}{Q}) = \max(T(\underset{\sim}{P}), T(\underset{\sim}{Q}))$$

การเชื่อมหรือสันธาน (conjunction)

$$\underset{\sim}{P} \wedge \underset{\sim}{Q} : x \text{ is } \underset{\sim}{A} \text{ and } \underset{\sim}{B} \qquad T(\underset{\sim}{P} \wedge \underset{\sim}{Q}) = \min(T(\underset{\sim}{P}), T(\underset{\sim}{Q}))$$

การส่อความหรือความหมายโดยนัย (implication)

$$\underset{\sim}{P} \to \underset{\sim}{Q} : \text{ if } x \text{ is } \underset{\sim}{A} \text{ then } y \text{ is } \underset{\sim}{B}$$

$$T(\underset{\sim}{P} \to \underset{\sim}{Q}) = T(\bar{\underset{\sim}{P}} \vee \underset{\sim}{Q}) = \max(T(\bar{\underset{\sim}{P}}), T(\underset{\sim}{Q}))$$

ตัวเชื่อมการส่อความสามารถจัดรูปแบบในรูปฐานของหลักเกณฑ์หรือฐานของกฎ (rule based form) *P* → Q: if x is ***A*** *then* y is ***B*** จะมีความหมายเทียบเคียงกับความสัมพันธ์แบบคลุมเครือ

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \bigcup (\bar{\underset{\sim}{A}} \times Y)$$

ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของ ***R*** แสดงได้ด้วยสมการ

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \max\left[\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right), \left(1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right)\right]$$

การให้เหตุผลอย่างประมาณ (Approximate Reasoning)

จุดมุ่งหมายสูงสุดของตรรกะแบบคลุมเครือ คือการจัดรูปแบบพื้นฐานทฤษฎีสำหรับการให้เหตุผลเกี่ยวกับประพจน์ที่ไม่แน่นอน การให้เหตุผลเช่นนี้เรียกว่าการให้เหตุผลอย่างประมาณ (approximate reasoning) การให้เหตุผลอย่างประมาณจะคล้ายกับการให้เหตุผลในตรรกะแบบฉบับด้วยการประพจน์ชนิดเที่ยง (precise propositions) ดังนั้นการให้เหตุผลอย่างประมาณจึงเป็นตัวขยายของแคลคูลัสประพจน์แบบฉบับ (classical propositional calculus)ที่ยอมให้มีความจริงบางส่วนได้

สมมุติเรามีรูปฐานของกฎเกณฑ์ที่จะแสดงข้อมูลแบบฟัซซี กฎเหล่านี้ถูกแสดงในรูปแบบ ข้อนำ-ข้อตาม (antecedent-consequent form) หรือ รูปแบบถ้า-แล้ว (if-then form) ในรูป

ถ้า x เป็น $\underline{\boldsymbol{A}}$, แล้ว y เป็น $\underline{\boldsymbol{B}}$

เมื่อ $\underline{\boldsymbol{A}}$ และ B เป็นเซตแบบคลุมเครือ

ถ้า x เป็น $\underline{\boldsymbol{A}}$', แล้ว y เป็น $\underline{\boldsymbol{B}}$'

$\underline{\boldsymbol{A}}$' เป็นข้อนำอันใหม่ (new antecedent) และ $\underline{\boldsymbol{B}}$' เป็นข้อตาม (consequent) ที่สามารถหาได้จาก "ถ้า x เป็น $\underline{\boldsymbol{A}}$' , แล้ว y เป็น $\underline{\boldsymbol{B}}$' " โดยใช้วิธีดำเนินการจัดองค์ประกอบ $\underline{\boldsymbol{B}}' = \underline{\boldsymbol{A}}' \circ \underline{\boldsymbol{R}}$ ซึ่งการจัดองค์ประกอบที่นิยมมากที่สุด ได้แก่ การจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและต่ำสุด (max-min composition) และการจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุดและผลคูณ (max-product composition)

การส่อความแบบต่าง ๆ

มีเทคนิคสำหรับการหาความสัมพันธ์ฟัซซี $\underline{\boldsymbol{R}}$ บนฐานของ If $\underline{\boldsymbol{A}}$, Then $\underline{\boldsymbol{B}}$ หรือ $\underline{\boldsymbol{R}} = \underline{\boldsymbol{A}} \rightarrow \underline{\boldsymbol{B}}$ มีการดำเนินการส่อความแบบคลุมเครือ ซึ่งสมเหตุสมผลสำหรับค่าทั้งหมดของ x และ y ($\forall x \in X$, $y \in Y$) รูปแบบต่อไปนี้เป็นตัวดำเนินการส่อความที่เป็นเทคนิคต่าง ๆ สำหรับใช้หาค่าฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ฟัซซี $\underline{\boldsymbol{R}}$ ที่นิยามบนปริภูมิผลคูณคาร์ทีเซียน $X \times Y$

Zadeh's or Classical Implication

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \max\left[\left(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right), \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right]$$

Correlation-Minimum or Mamdani's Implication

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right]$$

Lukasiewicz's Implication

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \min\left[1, \left(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right)\right]$$

Correlation-Product Implication

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)$$

Brouwerian Implication

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{for } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y), & \text{otherwise} \end{cases}$$

ฟังก์ชันการส่อความแบบคลุมเครือ

การส่อความแบบคลุมเครือเลขคณิตศาสตร์ของ Zadeh

$$t(x \text{ is } \underset{\sim}{A} \to y \text{ is } \underset{\sim}{B}) = 1 \wedge \left(1 - \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right)\right)$$

การส่อความแบบคลุมเครือแบบค่าสูงสุดของ Zadeh

$$t(x \text{ is } \underset{\sim}{A} \to y \text{ is } \underset{\sim}{B}) = \left(1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right) \vee \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)\right)$$

การส่อความแบบคลุมเครือแบบลำดับมาตรฐาน

$$t(x \text{ is } \underset{\sim}{A} \to y \text{ is } \underset{\sim}{B}) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \\ 0, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \end{cases}$$

การส่อความแบบคลุมเครือแบบลำดับของ Godelian

$$t(x \text{ is } \underset{\sim}{A} \to y \text{ is } \underset{\sim}{B}) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y), & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \end{cases}$$

การส่อความแบบคลุมเครือของ Godelian

$$t(x \text{ is } \underset{\sim}{A} \to y \text{ is } \underset{\sim}{B}) = \begin{cases} 1, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \\ \dfrac{\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)}{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > \mu_{\underset{\sim}{B}}(y) \end{cases}$$

ระบบกฎแบบฟัซซี

ในระบบปัญญาประดิษฐ์ (artificial intelligence) หรือเครื่องจักรอัฉริยะ (machine intelligence) มีวิธีการหลายวิธีในการที่จะแสดงองค์ความรู้ของมนุษย์ในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ตรรกะ (logic) เฟรม (frames) โครงข่ายความหมาย (semantic nets) ภววิทยา (ontology) และกฎ (rules) ซึ่งแบบหลังสุดเป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในระบบฟัซซี

รูปแบบกฎฟัซซี

ในระบบฟัซซีองค์ความรู้สามารถแสดงในรูปประโยค

ถ้า ข้อตั้ง (ข้อนำ) **ดังนั้น** ข้อยุติ (ข้อตาม)

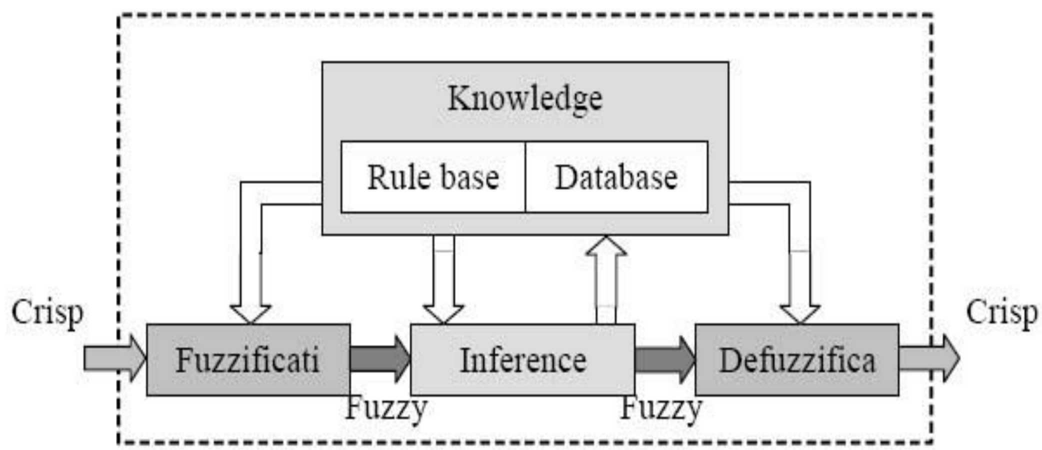
IF premise (antecedent), THEN conclusion (consequent)

ข้อความข้างต้นเป็นที่รู้จักกันดีในนาม "รูปแบบฐานกฎถ้า-ดังนั้น" (IF-THEN rule-based form) หรือ รูปแบบ**นิรนัย** (deductive form) ในรูปแบบการแสดงอนุมาน หากเราทราบความจริง (ข้อตั้ง ข้อสมมุติฐาน หรือข้อนำ) แล้วเราสามารถอนุมาน หรือหาข้อสรุปความจริงอีกอย่างหนึ่งที่เรียกว่าข้อยุติหรือข้อตาม การแสดงรูปแบบองค์ความรู้นี้ เรียกว่า **องค์ความรู้ตื้น** (shallow knowledge) ซึ่งค่อนข้างมีความเหมาะสมในบริบทของภาษา เนื่องจากเป็นการแสดงประสบการณ์ของมนุษย์และองค์ความรู้เชิงศึกษาสำนัก (heuristics) ในรูปแบบประโยคภาษามนุษย์ที่ใช้ในการสื่อสารทั่วไป แต่ไม่เป็นรูปแบบองค์ความรู้ที่ลึกล้ำ แบบที่เป็นการรู้เอง เป็นโครงสร้าง เป็นฟังก์ชัน หรือเป็นพฤติกรรมของวัตถุรอบ ๆ ตัวเรา อย่างที่เรียกว่า **อุปนัย** (inductive)

ระบบกฎฟัซซีเป็นสิ่งที่มีประโยชน์ในการจัดรูปแบบของระบบที่ซับซ้อนที่สามารถสังเกตได้โดยมนุษย์ เพราะระบบเหล่านี้สามารถแสดงด้วยตัวแปรภาษาในข้อนำและข้อตามของกฎได้ ตัวแปรภาษาสามารถนำแสดงเชิงธรรมชาติด้วยฟัซซีเซตและตัวเชื่อมตรรกะของเซตเหล่านั้น

โครงสร้างพื้นฐานของการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

โครงสร้างพื้นฐานของการประมวลผลแบบฟัซซี ซึ่งประกอบด้วยส่วนที่สำคัญ 4 ส่วนดังนี้ ดังภาพที่ 5-1



ภาพที่ 5-1 โครงสร้างพื้นฐานของการประมวลผลแบบฟัซซี

ส่วนที่แปลงการอินพุตทั่วไปเปลี่ยนเป็นการอินพุตแบบตัวแปรฟัซซี (Fuzzification) หรือในรูปแบบเซตฟัซซีหรือเรียกว่าเป็นตัวแปรภาษา (Linguistic Variable)

ฐานความรู้ (Knowledge base) เป็นส่วนที่จัดเก็บรวบรวมข้อมูลในการควบคุมประกอบ 2 ส่วนคือ ฐานกฎ (Rule base) และฐานข้อมูล (Database)

ฐานกฎ (Rule base) ส่วนของการกำหนดวิธีการควบคุม ซึ่งได้จากผู้เชี่ยวชาญในรูปแบบของชุดข้อมูลแบบกฎของภาษา (Linguistic rule)

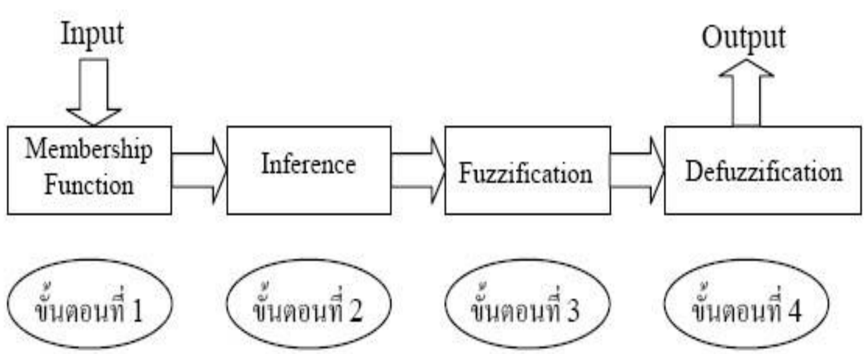
ฐานข้อมูล (Database) เป็นการจัดเตรียมส่วนที่จำเป็นเพื่อที่จะใช้ในการกำหนดกฎการควบคุม และการจัดการข้อมูลของตรรกศาสตร์ฟัซซี

เครื่องอนุมานหรือการตีความ (Inference Engine) เป็นส่วนที่ทำหน้าที่ตรวจสอบข้อเท็จจริงและกฎ เพื่อใช้ในการตีความหาเหตุผล เหมือนกลไกสำหรับควบคุมการใช้ความรู้ในการแก้ไขปัญหารวมทั้งการกำหนดวิธีการของการตีความเพื่อหาคำตอบ

ส่วนที่แปลงการเอาต์พุตให้อยู่ในช่วงที่เหมาะสม (Defuzzification) เป็นการทำการแปลงข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบฟัซซีให้เป็นค่าที่สรุปผลหรือค่าการควบคุมระบบ

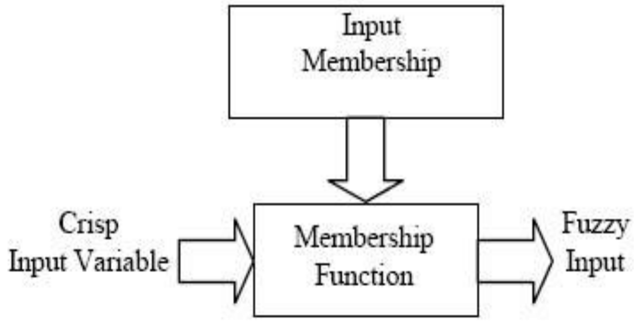
ขั้นตอนการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

ขั้นตอนการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิกมีรูปแบบการทำงานเป็น **4** ส่วนจะแสดงดัง ภาพที่ 5-2



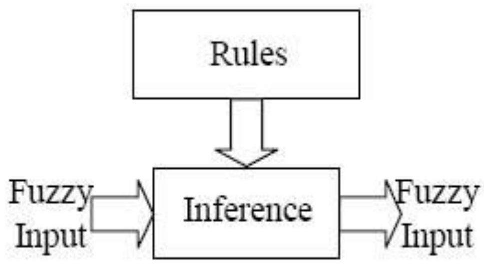
ภาพที่ 5-2 ขั้นตอนการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

ขั้นตอนที่ 1 เป็นการแปลงการอินพุตแบบทวินัยเปลี่ยนเป็นการอินพุตแบบตัวแปรฟัซซี โดยจะสร้างฟังก์ชันความเป็นสมาชิก โดยไม่จำเป็นต้องมีลักษณะเดียวกัน ขึ้นกับคุณลักษณะของแต่ละการอินพุต (Input) และความสำคัญต่อการเอาต์พุต (Output) ที่น่าสนใจโดยฟังก์ชันจะมีลักษณะเป็นการกำหนดภาษาสามัญ เพื่อให้เป็นฟัซซีการอินพุต ดังภาพที่ 5-3



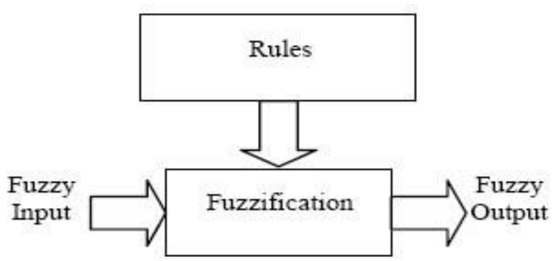
ภาพที่ 5-3 ขั้นตอนที่ 1 ของการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

ขั้นตอนที่ 2 เป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการอินพุตทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับเอาต์พุตที่อาศัยหลักการของการหาเหตุและผล อาจจะสร้างการเก็บข้อมูล การคาดการณ์จากการตัดสินใจของมนุษย์ หรือค่าจากการทดลอง โดยเขียนเป็นกฎการควบคุมระบบ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่ในรูปแบบ ถ้า (If) และ (And) หรือ (Or) ซึ่งเป็นภาษาสามัญ นำกฎทั้งหมดมาประมวลผลรวมกัน เพื่อการหาตัดสินใจที่เหมาะสม ดังภาพที่ 5-4



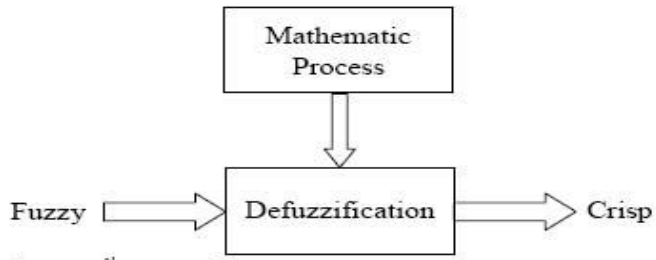
ภาพที่ 5-4 ขั้นตอนที่ 2 ของการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

ขั้นตอนที่ 3 เป็นการหาฟัซซีเอาต์พุต โดยการนำกฎการควบคุมที่สร้างขึ้น ในขั้นตอนที่ 2 มาประมวลผลกับฟัซซีอินพุต โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำค่าที่ได้ประมวลผล ดังภาพที่ 5-5



วิธีการทำเป็นค่าคลุมเครือ (Fuzzification) วิธีการที่นิยมใช้ในการตีความหาเหตุผลเลือกใช้ Max-Min method และ Max-Dot method

ขั้นตอนที่ 4 เป็นขั้นตอนสุดท้ายหรือขั้นตอนการสรุปเหตุผลฟัซซี โดยจะเปลี่ยนฟัซซีเอาต์พุตให้เป็นทวินัยเอาต์พุตตามภาพที่ 5-9 และด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์ เช่น วิธีการหาจุดศูนย์ถ่วง (Central of Gravity) เพื่อนำค่าที่ได้มาใช้ในการตัดสินใจเพื่อควบคุมระบบในสถานการณ์นั้นๆ



ภาพที่ 5-9 ขั้นตอนที่ 4 ของการประมวลผลแบบฟัซซีลอจิก

วิธีการทำค่าฟัซซีให้เป็นค่าปกติ (Defuzzification) วิธีการที่เป็นเทคนิคการเลือกค่าสูงสุดหรือสรุปหาเหตุผลจากหลาย ๆ เซตมาเพียงค่าเดียว ซึ่งเป็นการใช้ค่าสูงสุดของค่าระดับการเป็นสมาชิกจากการกระทำหลายๆ แบบ และเลือกกระทำเพียงรูปแบบเดียว

วิธีการหาจุดศูนย์ถ่วง (Central of Gravity: COG) เป็นวิธีการเฉลี่ยผลที่ได้จากการตีความหาเหตุที่นิยมใช้ในปัจจุบัน ค่าที่ได้จะคำนวณจุดศูนย์ถ่วงโดยรวมจะหาได้จากการประมาณค่าจากสมการ

$$COG = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i w_i}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i}$$

โดยสมการ ได้กำหนดค่าของสมการดังนี้

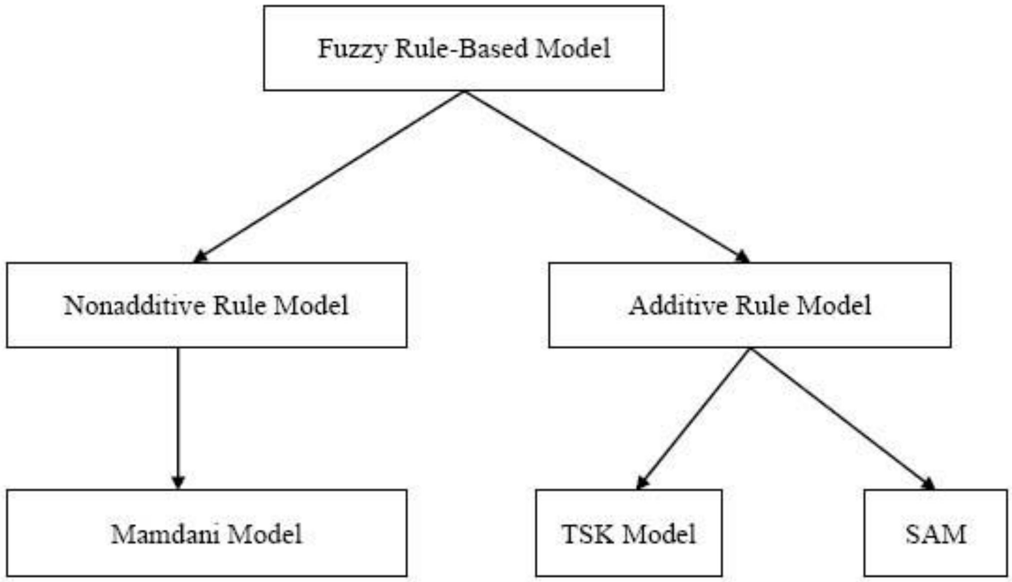
COG แทน ค่าของจุดศูนย์ถ่วง (Central of Gravity)

N แทน ค่าตั้งแต่ตำแหน่งที่ 1 ถึงตำแหน่งที่ i

α_i แทน ค่าฟัซซีของเอาต์พุตในเซตฟัซซีตำแหน่งที่ i

w_i แทน พื้นที่ใต้โค้งของเซตฟัซซีตำแหน่งที่ i

ชนิดของระบบกฎฟัซซี



ภาพที่ 5-10 กลุ่มของระบบกฎฟัซซี

ในการประมาณค่าฟังก์ชัน (function approximation) ระบบกฎฟัซซีที่ใช้มี 3 ชนิดใหญ่ ๆ ได้แก่ (1) รูปแบบ Madani (2) รูปแบบ Takagi-Sugeno-Kang (TSK) และ (3) รูปแบบ Standard Additive Model (SAM) รูปแบบ Madani รวมผลการอนุมาน (inference) ของกฎ โดยวิธีการซ้อนทับ (superimposition) จากกฎหลาย ๆ ข้อ ซึ่งไม่เป็นแบบบวกกัน จึงเรียกระบบแบบนี้ว่าเป็น nonadditive rule model แต่สำหรับ TSK และ SAM มีการอนุนามแบบรวมค่าน้ำหนัก (weighted sum) จากหลาย ๆ กฎ เพื่อรวมเป็นข้อสรุปสุดท้าย จึงเรียกระบบแบบนี้ว่า additive rule model การจัดกลุ่มของระบบกฎแบบฟัซซีแสดงในภาพที่ 5-10

ระบบกฎฟัซซีของแมมดานิ (Mamdani)

ระบบกฎฟัซซีแบบ Mamdani เป็นระบบที่มีความนิยมใช้มากที่สุดระบบหนึ่งในทางปฏิบัติ เป็นระบบที่ใช้ตัวแปรภาษาทั้งในข้อตั้งและข้อตามเพื่อจัดเทียบฟังก์ชันจาก เป็น $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ *เป็น* W

กฎที่ 1: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{11}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{12}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{1n}$) THEN y is $\underset{\sim}{C}_1$

กฎที่ 2: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{21}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{22}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{2n}$) THEN y is $\underset{\sim}{C}_2$

…

กฎที่ *L*: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{L1}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{L2}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{Ln}$) THEN y is $\underset{\sim}{C}_L$

เมื่อ x_j, $j = 1, \ldots, n$, เป็นตัวประกอบที่ j ของตัวแปรอินพุต $\mathbf{x}$, y เป็นตัวแปรเอาต์พุต, A_{ij} เป็นพจน์ภาษาของข้อตั้ง (consequence linguistic term) หรือเป็นฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของข้อตั้ง (antecedent membership function) ในกฎที่ i, $i = 1, \ldots, L$, C_i เป็นพจน์ภาษาของข้อตามหรือฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของข้อตาม (consequent membership function) ของกฎที่ i

กำหนดให้ $\underset{\sim}{A}^s$ เป็นฟัซซีเซตใหม่ สำหรับกฎข้อที่ i, $i = 1, \ldots, L$

$$\underset{\sim}{A}_i^s = \underset{\sim}{A}_{i1} \cap \underset{\sim}{A}_{i1} \cap \cdots \cap \underset{\sim}{A}_{in}$$

แสดงในรูปฟังก์ชันความเป็นสมาชิกได้เป็น

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i^s}(x) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}_{i1}}(x_1), \mu_{\underset{\sim}{A}_{i2}}(x_2), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}_{in}}(x_n)\right)$$

ถ้าหากมีอินพุตเข้ามาในรูป

$$(x_1 = x_1'), (x_2 = x_2'), \ldots, (x_n = x_n')$$

โดยที่ $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ เป็นค่าอินพุตใด ๆ จะได้ค่าฟัซซีในส่วนของข้อตั้งเป็น

$$\alpha_i = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}_{i1}}(x_1'), \mu_{\underset{\sim}{A}_{i2}}(x_2'), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}_{in}}(x_n')\right)$$

ค่าเอาต์พุตของกฎแต่ละข้อของระบบฟัซซีแบบ Mamdani ที่เป็นค่าฟัซซีสามารถหาได้จากสมการ

$$\mu_{\underset{\sim}{C}_i'}(y) = \alpha_i \wedge \mu_{\underset{\sim}{C}_i}(y)$$

ค่าเอาต์พุตของระบบเป็นผลรวมจากเอาต์พุตจากกฎแต่ข้อโดยใช้สมการ

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(y) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{C}_1'}(y), \mu_{\underset{\sim}{C}_2'}(y), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{C}_L'}(y)\right)$$

ฟัซซีเอาต์พุต สามารถแปลงเป็นค่าปกติได้โดยวิธี defuzzification แบบเฉลี่ยน้ำหนัก

$$y^* = \frac{\sum \mu_{\underset{\sim}{C}}(\overline{y}) \times \overline{y}}{\sum \mu_{\underset{\sim}{C}}(\overline{y})}$$

เมื่อ $\overline{y}$ เป็นค่า centriod ของ ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่สมมาตร

วิธีการอนุมานแบบ Mamdani

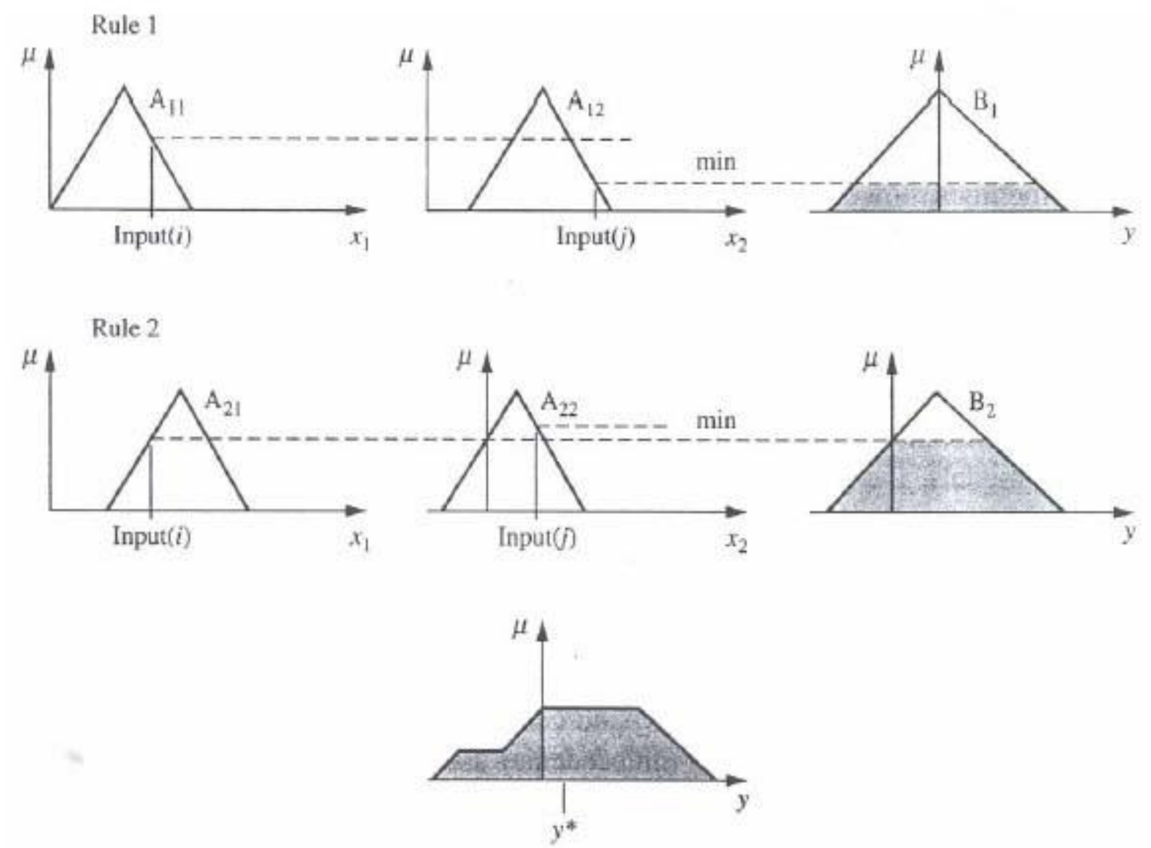
กำหนดให้ ระบบฟัซซีแบบ Mamdani มี 2 อินพุต x_1 และ x_2 (antecedent) และ 1 เอาต์พุต y (consequent) ซึ่งมีกฎฟัซซีเป็น

$$\text{IF } x_1 \text{ is } \underset{\sim}{A}_{k1} \text{ and } x_2 \text{ is } \underset{\sim}{A}_{k2} \text{ THEN } y \text{ is } \underset{\sim}{B}_k \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, \ldots, r$$

ผลรวมเอาต์พุตหาได้ โดยการใช้วิธีการจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุด-ต่ำสุด (max-min composition) และวิธีการจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุด-ผลคูณ (max-product composition)

วิธีการจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุด-ต่ำสุด

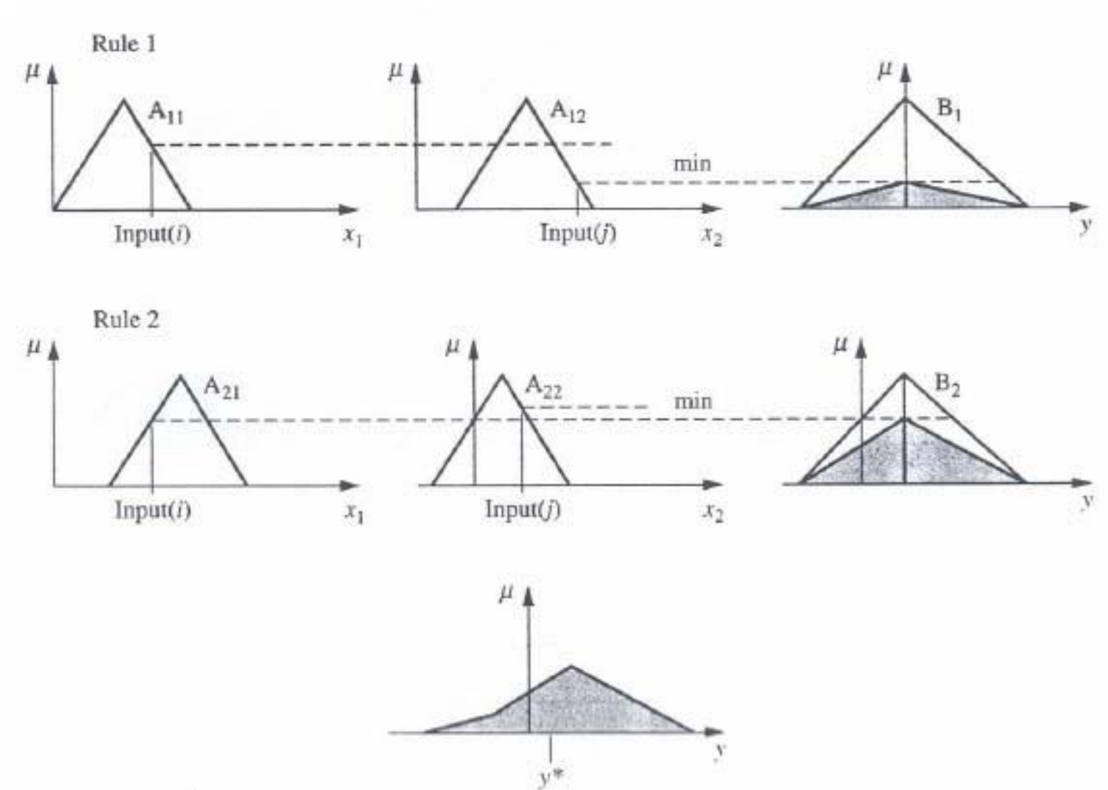
$$\mu_{B_k}(y) = \max\left[\min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}_{k1}}(\text{Input}(i)), \mu_{\underset{\sim}{A}_{k2}}(\text{Input}(j))\right)\right] \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, \ldots, r$$



ภาพที่ 5-11 กราฟิกวิธีการอนุมานแบบ Mamdani (Max-Min)

วิธีการจัดองค์ประกอบแบบค่าสูงสุด-ผลคูณ

$$\mu_{\underset{\sim}{B}_k}(y) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}_{k1}}(\text{Input}(i)) \cdot \mu_{\underset{\sim}{A}_{k2}}(\text{Input}(j))\right) \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, \ldots, r$$



ภาพที่ 5-12 กราฟิกวิธีการอนุมานแบบ Mamdani (Max-Product)

ระบบกฎฟัซซีแบบ TSK (Takagi-Sugeno-Kang)

ระบบกฎฟัซซีแบบ TSK ซึ่งนำเสนอโดย Takagi และ Sugeno ในปีค.ศ. 1984 และต่อมา Sugeno และ Kang ได้วิจัยต่อมา ระบบกฎฟัซซีแบบ TSK จะอยู่ในรูป

กฎที่ 1: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{11}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{12}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{1n}$)

THEN $y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_{10} + b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n$

กฎที่ 2: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{21}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{22}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{2n}$)

THEN $y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_{20} + b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n$

…

กฎที่ *L*: IF (x_1 is $\underset{\sim}{A}_{L1}$) AND (x_2 is $\underset{\sim}{A}_{L2}$) AND … AND (x_n is $\underset{\sim}{A}_{Ln}$)

THEN $y_L = f_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_{L0} + b_{L1}x_1 + \ldots + b_{Ln}x_n$

เมื่อ x_j, $j = 1, \ldots, n$, เป็นตัวประกอบที่ j ของตัวแปรอินพุต $\mathbf{x}$, y เป็นตัวแปรเอาต์พุต, A_{ij} เป็นพจน์ภาษาของข้อตั้ง (consequence linguistic term) หรือเป็นฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของข้อตั้ง (antecedent membership function) ในกฎที่ i, $i = 1, \ldots, L$, f_i เป็นสมการเชิงเส้นของข้อตาม (consequent linear function) ของกฎข้อที่ i

ถ้าหากมีอินพุตเข้ามาในรูป

($x_1 = x_1'$), ($x_2 = x_2'$), …, ($x_n = x_n'$)

โดยที่ $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ เป็นค่าอินพุตใด ๆ จะได้ค่าฟัซซีในส่วนของข้อตั้งเป็น

$$\alpha_i = \min\left(\mu_{A_{i1}}(x_1'), \mu_{A_{i2}}(x_2'), \ldots, \mu_{A_{in}}(x_n')\right)$$

ค่าเอาต์พุตของกฎแต่ละข้อของระบบฟัซซีแบบ TSK สามารถหาได้จากสมการ

$$y_i = b_{i0} + b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n$$

ค่าเอาต์พุตของระบบเป็นผลรวมจากเอาต์พุตจากกฎแต่ข้อ โดยใช้สมการ

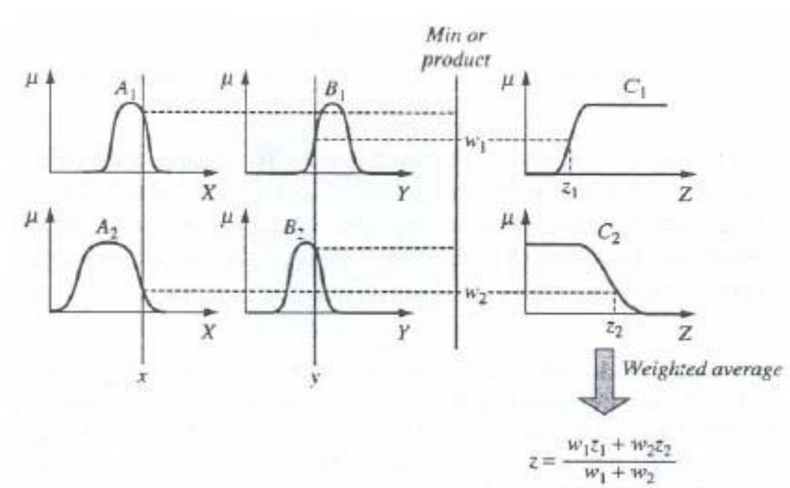
$$y = \frac{\sum_{i=1}^{L} \alpha_i \times y_i}{\sum_{i=1}^{L} \alpha_i}$$

ระบบฟัซซีแบบบวกมาตรฐาน (Standard Additive Model: SAM)

ระบบฟัซซีแบบบวกมาตรฐาน เช่น ระบบฟัซซแบบซูคาโมโต หรือ Tsukamoto’s Fuzzy System (Tsukamoto, 1979) ในระบบนี้ส่วนข้อตั้งและข้อตามจะเป็นพจน์ภาษาคล้ายกับ ระบบฟัซซีของ Mamdani แต่ส่วนของข้อตาม (consequent) ของกฎฟัซซีจะถูกแสดงเป็นฟัซซีเซตซึ่งมีฟังก์ชัน **สมาชิกแบบทางเดียว** (monotonic membership function) ดังภาพที่ 5-17 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบทางเดียวบางครั้งเรียกว่า shoulder function เป็นค่าอนุมานเอาต์พุตของแต่ละกฎที่เป็นค่าธรรมดาทั่วไป (crisp value) ผลเอาต์พุตทั้งหมด (ดังภาพที่ 517) สามารถคำนวณได้จากค่าเฉลี่ยน้ำหนักของเอาต์พุตจากแต่ละกฎ ดังสมการ

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{L} w_i \times z_i}{\sum_{i=1}^{L} w_i}$$

เนื่องจากกฎแต่ละข้อมีค่าเอาต์พุตเป็นค่าใช้งานทั่วไปแล้ว ระบบจะรวมเอาต์พุตทั้งหมดได้อย่างรวดเร็วไม่ต้องอาศัยวิธีการแปลงค่าฟัซซีเป็นค่าธรรมดา (defuzzification) ดังนั้นจึงประหยัดเวลามากขึ้น



ภาพที่ **5-17** Tsukamoto Fuzzy Model

กระบวนการหาเหตุผลแบบฟัซซี

การหาเหตุผลแบบฟัซซีทั่วไป

กำหนดให้ระบบฟัซซีหนึ่งมี n อินพุต และ 1 เอาต์พุต ประกอบด้วยกฎดังนี้

$Rule_1$: IF x_1 is A_{11} AND x_2 is A_{12} AND … AND x_1 is A_{1n} THEN y is B_1

$Rule_2$: IF x_1 is A_{21} AND x_2 is A_{22} AND … AND x_1 is A_{2n} THEN y is B_2

…

$Rule_L$: IF x_1 is A_{L1} AND x_2 is A_{L2} AND … AND x_1 is A_{Ln} THEN y is B_L

เมื่อ $\mathbf{x} = [x_{1,}\ x_2, \ldots, x_n]^T$ เป็นตัวแปรอินพุต และ y เป็นตัวแปรเอาต์พุตของระบบ เป็นพจน์ภาษา (linguistic terms) ของข้อตั้ง (antecedent) เมื่อ i เป็นกฎที่ i, i = 1,…L, และ j เป็นมิติที่ j j = 1, …, n, และให้ เป็นพจน์ภาษา (linguistic terms) ของข้อตาม (antecedent) ijAiB

จากรูปประโยค IF-THEN สามารถตีความโดยแยกเป็นส่วน ๆ ซึ่งประกอบด้วย ตัวเชื่อมตรรกะ “and or ตัวอนุมาน “then” ตัวจัดองค์ประกอบ ∘ อินพุตใด ๆ สามารถสรุปผลได้จากระบบฟัซซีดังกล่าว ตัวอย่างเช่น ถ้ามีอินพุตที่ต้องการหาข้อสรุปผล

$$x_1 = x_1',\ x_2 = x_2',\ \ldots,\ x_n = x_n'$$

จากกฎฟัซซีข้างต้น สามารถสรุปผลได้ว่า

y = B

กฎข้อที่ i จากระบบฟัซซีนี้

$Rule_i$: IF x_1 is A_{i1} AND x_2 is A_{i2} AND … AND x_1 is A_{in} THEN y is B_i

มีความสัมพันธ์ฟัซซี $\boldsymbol{R_i}$ ตามสมการ

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \left(A_{i1} \times A_{i2} \times \cdots \times A_{in} \to B_i\right)\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y\right)$$

$$= \left(A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(x_2) \wedge \cdots \wedge A_{in}(x_n)\right) \to B_i(y)$$

จากอินพุต $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2',\ \ldots,\ x_n = x_n'$ สามารถสรุปหา **y = B** โดยหาเอาต์พุตของกฎแต่ละข้อ

$$B_i' = \left(\mu(x_1') \times \mu(x_2') \times \cdots \times \mu(x_n')\right) \circ R_i$$

$$B_i'(y) = \left(A_{i1}(x_1') \wedge A_{i2}(x_2') \wedge \cdots \wedge A_{in}(x_n')\right) \to B_i(y)$$

จากนั้นรวม B_i' จากกฎแต่ข้อเข้าด้วยกัน ด้วยการยูเนียน ดังสมการ

$$B(y)=\bigcup_{i=1}^{L} B_i(y) \;=\; B_1'(y)\vee B_2'(y)\vee\cdots\vee B_L'(y)$$

ดังนั้นฟัซซีเซตเอาต์พุต จะหาได้จาก

$$\begin{aligned} B(y)=&\left[\left(A_{11}(x_1')\wedge A_{12}(x_2')\wedge\cdots\wedge A_{1n}(x_n')\right)\rightarrow B_1(y)\right]\vee \\ &\left[\left(A_{21}(x_1')\wedge A_{22}(x_2')\wedge\cdots\wedge A_{2n}(x_n')\right)\rightarrow B_2(y)\right]\vee \\ &\cdots\vee\left[\left(A_{L1}(x_1')\wedge A_{L2}(x_2')\wedge\cdots\wedge A_{Ln}(x_n')\right)\rightarrow B_L(y)\right] \end{aligned}$$

สรุปขั้นตอนการประมวลผลเพื่อหาเหตุแบบฟัซซี

1. รับข้อมูลอินพุต $x_1=x_1',\ x_2=x_2',\ \ldots,\ x_n=x_n'$
2. ทำการแปลงค่าอินพุต เป็นค่าฟัซซี $\mu(x_1'),\mu(x_2'),\cdots,\mu(x_n')$
3. หาค่าฟัซซี (firing strength) จากข้อตั้ง ของกฎแต่ละข้อ $A_{i1}(x_1')\ \wedge\ A_{i2}(x_2')\ \wedge\ \cdots\ \wedge\ A_{in}(x_n')$
4. คำนวณค่าฟัซซีเอาต์พุตจากกฎแต่ละข้อ
   $B_i'(y)=\left(A_{i1}(x_1')\wedge A_{i2}(x_2')\wedge\cdots\wedge A_{in}(x_n')\right)\rightarrow B_i(y)$
5. คำนวณค่าฟัซซีเอาต์พุตรวมจากทุกกฎในระบบ
   $B(y)\;=\;B_1'(y)\vee B_2'(y)\vee\cdots\vee B_L'(y)$

การหาเหตุผลแบบฟัซซีตามวิธี Mamdani

เพื่อความเข้าใจง่าย จะยกตัวอย่างกฎฟัซซี IF-THEN สองกฎที่อยู่ในรูป

Rule$_1$: if x is A_1 and y is B_1 then z is C_1

Rule$_2$: if x is A_2 and y is B_2 then z is C_2

สำหรับอินพุตใด ๆ x is x_0 and y is y_0 ดังนั้นผลสรุป z is C

การหาผลสรุปฟัซซีในรูปแบบ Mamdani เป็นการใช้ตัวดำเนินการค่าต่ำสุด (minimum operator) สำหรับการเชื่อมประโยคแบบ “and” และใช้ตัวดำเนินการค่าสูงสุดสำหรับการเชื่อมประโยคแบบ “or”

ระดับค่าฟัซซีของกฎแต่ละข้อในส่วนข้อตั้ง หาได้โดยการคำนวณจากสมการ

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$$

เอาต์พุตของกฎแต่ละข้อ สามารถคำนวณได้จาก

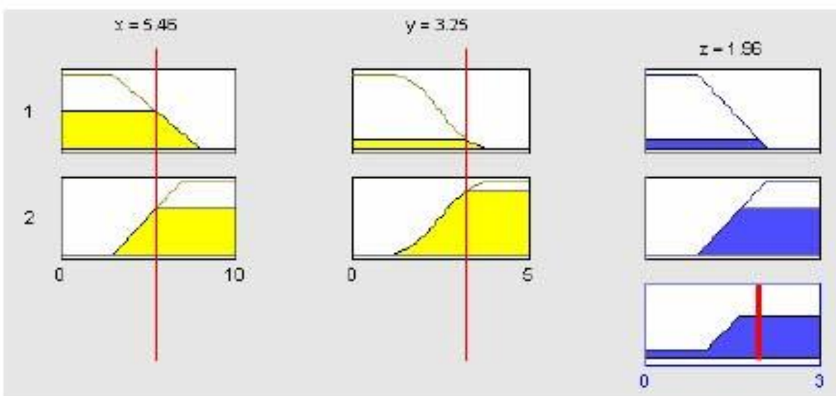
$$C_1'(w) = (\alpha_1 \wedge C_1(w)),$$

$$C_2'(w) = (\alpha_2 \wedge C_2(w))$$

ผลรวมของเอาต์พุตฟัซซีทั้งหมดหาได้จากการยูเนียนผลลัพธ์จากแต่ละกฎ

$$C(w) = C_1'(w) \vee C_2'(w) = (\alpha_1 \wedge C_1(w)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(w))$$

สุดท้าย หากต้องการผลเอาต์พุตที่เป็นค่าทั่วไป สามารถหาโดยวิธีการแปลงค่าฟัซซีเป็นค่าทั่วไป (defuzzification method)



ภาพที่ 6-1 การอนุมานผลระบบฟัซซีแบบ Mamdani

อ้างอิงจาก

ดร.พยุง มีสัจ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

http://suanpalm3.kmitnb.ac.th/teacher/phayung/powerpoint.asp?pno=1