

เอกสารประกอบการเรียน

เรื่อง ความน่าจะเป็น (PROBABILITY)

ความรู้เดิมที่ผู้เรียนต้องทราบ

1. ข้อความคาดการณ์ เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุป ซึ่งเชื่อว่ามีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง

2. อัตราส่วนและร้อยละ (Ratio and Percent)

อัตราส่วน คือ การเปรียบเทียบจำนวนสิ่งของชนิดเดียวกันตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไป เช่น

– การแข่งขันฟุตบอลระหว่างทีมไทยกับทีมเวียดนาม คาดว่าไทยจะชนะ 5 ต่อ 2

ร้อยละ คือ เศษส่วน หรืออัตราส่วนที่มีส่วนเป็น 100 อาจแทนด้วยคำว่า “ เปอร์เซนต์ (%) ”

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\% \text{ เช่น}$$

– พรุ้งนี้จะมีฝนตก 70% ของพื้นที่

– คาดว่านักท่องเที่ยวกาเบอันตามันลดลง 20%

ความน่าจะเป็น (Probability)

ในชีวิตประจำวันเรามักจะได้ยินคำพูดที่เกี่ยวกับการคาดคะเน การทำนาย โอกาส หรือความเป็นไปได้ที่จะเกิดเหตุการณ์ที่กล่าวถึง แต่ไม่สามารถบอกได้แน่ชัดว่าเหตุการณ์เหล่านั้นจะเกิดขึ้นหรือไม่ จนกว่าจะถึงเวลาที่กำหนด

จำนวนจำนวนหนึ่งที่บ่งบอกถึงโอกาสมากน้อยที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์นั้น ในทางคณิตศาสตร์เรียกจำนวนนั้นว่า **ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์**

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ได้มีการศึกษาอย่างจริงจังเมื่อ ค.ศ.1654 หลังจากเชอวาลิเอร์ เดอ เมเร (Chevalier de mere) นักการพนันชาวฝรั่งเศสแพ้การพนัน เมื่อเขาได้ทำ

พนันกับนักการพนันอื่นๆว่า “เมื่อทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน 24 ครั้ง จะมีอย่างน้อยหนึ่งครั้งที่ขึ้นแต้ม 6 ทั้งสองลูก” เดอเมเร สงสัยว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น เขาจึงนำปัญหานี้ไปตาม เบลล์ ปาสกาล (Blaise Pascal) นักคณิตศาสตร์ผู้เป็นเพื่อนของเขา และปาสกาลก็ได้้นำปัญหาเดียวกันนี้ไปปรึกษา ปีแยร์ เดอ แฟร์มา (Pierre de Fermat) เพื่อนนักคณิตศาสตร์ของเขา ทั้งสองจึงได้ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างจริงจัง จนได้คำตอบว่า ถ้าโยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกัน 24 ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ายกจะหงายขึ้นแต้ม 6 ทั้งสองลูกอย่างน้อยหนึ่งครั้ง เท่ากับ 0.4914 หรือประมาณ **49%** ค่าความน่าจะเป็นข้างต้นเป็นหลักฐานยืนยันว่าเพราะเหตุใด เดอเมเร จึงแพ้พนันมากกว่าจะชนะพนัน

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในทางคณิตศาสตร์

1. **การทดลองสุ่ม** (Random Experiment) คือ การทดลองที่เราไม่สามารถบอกล่วงหน้าได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการกระทำจะเป็นอะไร แต่สามารถบอกได้ว่ามีผลลัพธ์อะไรบ้างที่จะเกิดขึ้นได้ เช่น

- โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 1 ครั้ง หน้าที่จะหงายขึ้นอาจออกหัวหรือออกก้อย
- ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง หน้าที่จะหงายขึ้นอาจเป็นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6

การกระทำบางอย่างที่เราทราบผลลัพธ์ได้แน่นอนไม่ถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม เช่น นำ 2 บวกกับ 3 ผลลัพธ์เป็น 5

2. **แซมเปิลสเปซ** (Sample Space) คือ กลุ่มของผลที่เกิดขึ้นทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม นิยมใช้สัญลักษณ์ S แทน แซมเปิลสเปซ เช่น

- โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ถ้า H แทนการออกหัว และ T แทนการออกก้อย ผลในแซมเปิลสเปซ คือ H , T
- โยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง ผลในแซมเปิลสเปซ คือ (H , H) , (H , T) , (T , H) , (T , T) , (H , H) หมายถึง เหรียญอันแรกออกหัว และเหรียญอันที่สองออกหัว (H , T) หมายถึง เหรียญอันแรกออกหัว และเหรียญอันที่สองออกก้อย

ข้อสังเกต

1. โยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง กับ โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ผลในแซมเปิลสเปซได้เหมือนกัน
2. $\{H, T\}$ กับ $\{T, H\}$ ไม่เหมือนกัน เพราะถืออันดับของการเกิด
3. $\{H, T\}$ หมายถึง เหรียญอันแรกหรือโยนครั้งแรกออกหัว และเหรียญอันที่สองหรือโยนครั้งที่สองออกท้าย
4. $\{T, H\}$ หมายถึง เหรียญอันแรกหรือโยนครั้งแรกออกท้าย และเหรียญอันที่สองหรือโยนครั้งที่สองออกหัว

– โยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลของแซมเปิลสเปซ คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 จากการทดลองสุ่มและแซมเปิลสเปซที่กล่าวมา เพื่อความสะดวก ถ้าให้กลุ่มของผลการทดลองสุ่ม ถูกล้อมรอบด้วยวงเล็บ $\{ \}$ เราสามารถเขียนแซมเปิลสเปซ (S) ได้ ดังนี้

แซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง คือ $S = \{H, T\}$

แซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง คือ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

แซมเปิลสเปซของการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง คือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. เหตุการณ์ (Events) คือ สิ่งที่เราสนใจจะพิจารณาจากการทดลองสุ่ม เป็นกลุ่มย่อยของแซมเปิลสเปซ นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่แทนเหตุการณ์ เช่น

– เหตุการณ์ของการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง แล้วเหรียญออกหัว ผลคือ H ถ้าให้ E แทน เหตุการณ์ที่เหรียญออกหัว แล้ว $E = \{H\}$

– เหตุการณ์ของการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง แล้วได้ผลบวกของแต้มเป็น 11 ผลคือ $(5, 6), (6, 5)$ ถ้าให้ A แทน เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็น 11 แล้ว $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$

4. จำนวนพลที่เกิดขึ้นในแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์

โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง เขียนแซมเปิลสเปซ ได้ คือ

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\} \text{ พลที่เกิดขึ้นเท่ากับ 4 คู่}$$

อันดับ ถ้าให้ $n(S)$ แทน จำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซแล้ว S แล้ว $n(S) = 4$

E แทน เหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 อัน

$$E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\} \text{ พลที่ได้มี 3 คู่อันดับ}$$

ถ้าให้ $n(E)$ แทน จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E แล้ว $n(E) = 3$

5. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ให้ E แทน เหตุการณ์ใดๆที่เป็นส่วนหนึ่งของแซมเปิลสเปซ S

$P(E)$ แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

6. สมบัติความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ

ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ และ E เป็นเหตุการณ์ใดๆในแซมเปิลสเปซ S

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 หรือ $0 \leq P(E) \leq 1$

2. ความน่าจะเป็นของแซมเปิลสเปซเท่ากับ 1 หรือ $P(S) = 1$

3. ถ้า $P(E)$ แทน ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ E

แล้ว $P(E')$ แทน ความน่าจะเป็นที่ไม่เกิดเหตุการณ์ E

$$\text{แล้ว } P(E) + P(E') = 1$$

$$\text{หรือ } P(E') = 1 - P(E)$$

ตัวอย่าง 1 โยนเหรียญบาทเที่ยงตรง 2 อัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เหรียญออกหัวทั้งคู่
2. เหรียญออกก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ
3. เหรียญออกหน้าตรงกัน

วิธีทำ เขียนแซมเปิลสเปซได้ คือ

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}, n(S) = 4$$

1. ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวทั้งคู่

$$E_1 = \{(H, H)\}, n(E_1) = 1$$

$$\text{ดังนั้น } P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \text{ตอบ}$$

2. ให้ E_2 แทน เหตุการณ์ที่เหรียญออกก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ

$$E_2 = \{(H, T), (T, H), (T, T)\}, n(E_2) = 3$$

$$\text{ดังนั้น } P(E_2) = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{ตอบ}$$

3. ให้ E_3 แทน เหตุการณ์ที่เหรียญออกหน้าตรงกัน

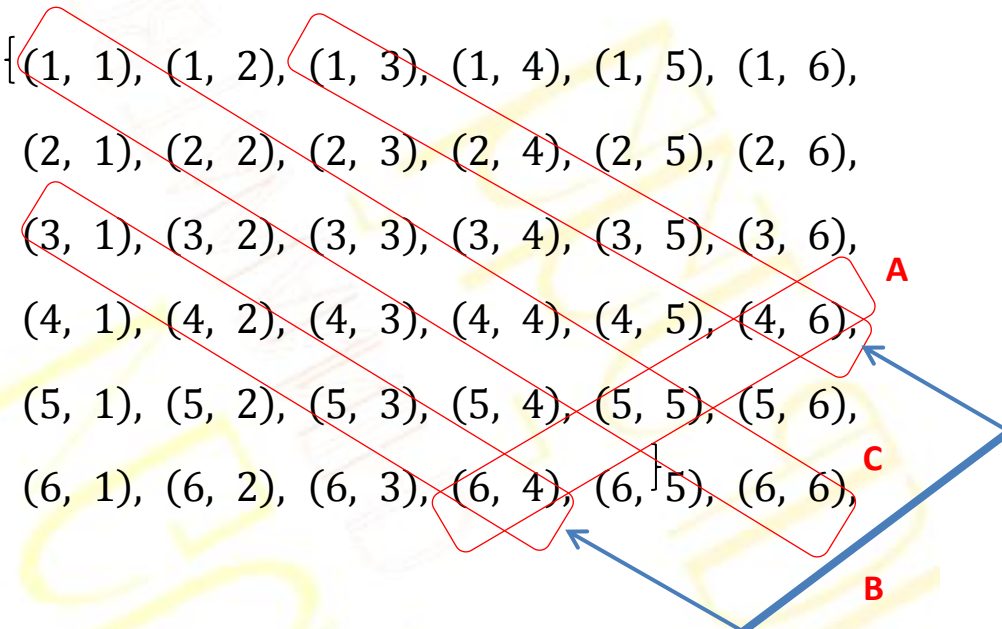
$$E_3 = \{(H, H), (T, T)\}, n(E_3) = 2$$

$$\text{ดังนั้น } P(E_3) = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 2 โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ผลรวมของแต้มเป็น 10
2. ผลต่างของแต้มเป็น 2
3. ลูกเต๋าก่อนออกแต้มตรงกัน
4. ผลรวมของแต้มเป็น 13

วิธีทำ เขียนแซมเปิลสเปซได้คือ

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$


$$n(S) = 36$$

1. ให้ A แทน เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 10

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}, n(A) = 3$$

$$\text{ดังนั้น } P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad \text{ตอบ}$$

2. ให้ B แทน เหตุการณ์ที่ผลต่างของแต้มเป็น 2

$$B = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (3, 1), (4, 2), \\ (5, 3), (6, 4)\}$$

$$n(B) = 8$$

$$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad \text{ตอบ}$$

3. ให้ C แทน เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าดูออกแต้มตรงกัน

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$n(C) = 6$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{ตอบ}$$

4. ให้ D แทน เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 13

ไม่มีผลที่เกิดขึ้นใน D [เพราะว่าผลรวมของแต้มต้องไม่เกิน 12]

$$n(D) = 0$$

$$P(D) = \frac{0}{36} = 0 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3 ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเท่ากัน 12 ลูก เป็นลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 4 ลูก และ สีดำ 5 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลในถุงขึ้นมา 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. ลูกบอลสีขาว
2. ลูกบอลสีแดง
3. ลูกบอลสีดำหรือสีแดง
4. ลูกบอลสีขาวและสีดำ

วิธีทำ ให้ W , R , B แทนลูกบอลสีขาว แดง และดำ ตามลำดับ

$$S = \{W, W, W, R, R, R, R, B, B, B, B, B\}$$

$$n(S) = 12$$

1. ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาว

$$E_1 = \{W, W, W\}$$

$$n(E_1) = 3$$

$$P(E_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{ตอบ}$$

2. ให้ E_2 แทน เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง

$$E_2 = \{R, R, R, R\}$$

$$n(E_2) = 4$$

$$P(E_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{ตอบ}$$

3. ให้ E_3 แทน เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีดำหรือสีแดง

$$E_3 = \{(\textcircled{B}, \textcircled{B}), (\textcircled{B}, \textcircled{B}), (\textcircled{B}, \textcircled{B}), (\textcircled{B}, \textcircled{R}), (\textcircled{B}, \textcircled{R}), (\textcircled{R}, \textcircled{R}), (\textcircled{R}, \textcircled{R}), (\textcircled{R}, \textcircled{R})\}$$

$$n(E_3) = 9$$

$$P(E_3) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{ตอบ}$$

4. ให้ E_4 แทน เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวและสีดำ

ไม่เกิดเหตุการณ์ E_4 (เพราะว่าหยิบลูกบอล 1 ลูก จะได้ทั้งสีขาวและสีดำไม่ได้)

$$n(E_4) = 0$$

$$P(E_4) = \frac{0}{12} = 0 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 4 มีอักษรอยู่ 3 ตัว คือ a, e, r เมื่อนำมาเรียงกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้คำที่มีความหมายเป็นเท่าใด

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เขียนแซมเปิลสเปซ} \quad S = \{aer, are, ear, era, rae, rea\}$$

$$n(S) = 6$$

ให้ E แทน เหตุการณ์ที่เรียงได้คำที่มีความหมาย

$$E = \{are, ear, era\}$$

$$n(E) = 3$$

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 5 ดึงไพ่ 1 ใบ ออกจากไพ่ 1 สำรับ ซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. ไพ่โพแดง
2. *Jack*

วิธีทำ ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งออกเป็น 4 ชุด คือ โพแดง โพดำ ดอกจิก และ

ข้าวหลามตัด มีชุดละ 13 ใบ แต่ละชุดมีไพ่ 13 ชนิด คือ แด้ม 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K และ A มีชนิดละ 4 ใบ

1. จำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซเท่ากับ 52

จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์เท่ากับจำนวนไพ่โพแดงซึ่งเท่ากับ 13

ดังนั้น $n(S) = 52$, $n(E) = 13$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

ความน่าจะเป็นที่จะดึงได้ไพ่โพแดง = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ตอบ

2. จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์เท่ากับจำนวนไพ่ *Jack* เท่ากับ 4

ความน่าจะเป็นที่จะดึงได้ไพ่ *Jack* = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ตอบ

ตัวอย่าง 6 ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 3 คน อายุต่างกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้

1. มีบุตรหัวปีเป็นหญิง
2. มีบุตรคนสุดท้ายเป็นหญิง
3. มีบุตรเป็นชายทั้งสามคน
4. มีบุตรคนหัวปีเป็นหญิงและคนสุดท้ายเป็นชาย

วิธีทำ อันดับของบุดรเขียนแทนด้วยแผนภาพต้นไม้ได้ ดังนี้

```
graph LR; A[x] --> B[x]; A --> C[y]; B --> D[x]; B --> E[y]; C --> F[x]; C --> G[y]; D --> H["(x, x, x)"]; E --> I["(x, x, y)"]; F --> J["(x, y, x)"]; G --> K["(x, y, y)"]; H --> L["(y, x, x)"]; I --> M["(y, x, y)"]; J --> N["(y, y, x)"]; K --> O["(y, y, y)"];
```

คนหัวปี	คนกลาง	คนสุดท้อง	ผล
x	x	x	(x, x, x)
	x	y	(x, x, y)
y	x	x	(x, y, x)
	y	y	(x, y, y)
y	x	x	(y, x, x)
		y	(y, x, y)
	y	x	(y, y, x)
		y	(y, y, y)

เขียนแชนเปิลสเปซได้ คือ

$$S = \{(u, u, u), (u, u, v), (u, v, u), (u, v, v), (v, u, u), (v, u, v), (v, v, u), (v, v, v)\}$$

$$n(S) = 8$$

1. ให้ A แทน เหตุการณ์ที่บุตรคนหัวปีเป็นหญิง

$$A = \{(u, v, v), (u, v, w), (u, w, v), (u, w, w)\}$$

$$n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = 0.5$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = 0.5$$

2. ให้ B แทน เหตุการณ์ที่บุตรคนสุดท้ายต้องเป็นหญิง

$$B = \{(ช, ช, หญิง), (ช, หญิง, หญิง), (หญิง, ช, หญิง), (หญิง, หญิง, หญิง)\}$$

$$n(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = 0.5 \quad \text{ตอบ}$$

3. ให้ C แทน เหตุการณ์ที่บุตรทั้งสามคนเป็นชาย

$$C = \{(ช, ช, ช)\}$$

$$n(C) = 1$$

$$P(C) = \frac{1}{8} = 0.125 \quad \text{ตอบ}$$

4. ให้ D แทน เหตุการณ์ที่บุตรคนหัวปีเป็นหญิง และบุตรคนสุดท้ายต้องเป็นชาย

$$D = \{(หญิง, ช, ช), (หญิง, หญิง, ช)\}$$

$$n(D) = 2$$

$$P(D) = \frac{2}{8} = 0.25 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 7 สุ่มตัวอักษรจากคำว่า *SONGWIT* ขึ้นมา 1 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. สระ 2. พยัญชนะ 3. S

วิธีทำ แซมเปิลสเปซ คือ $S = \{S, O, N, G, W, I, T\}$

$$n(S) = 7$$

1. ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่ได้สระ

$$E_1 = \{I, O\}$$

$$n(E_1) = 2$$

$$P(E_1) = \frac{2}{7} \quad \text{ตอบ}$$

2. ให้ E_2 แทน เหตุการณ์ที่ได้พยัญชนะ

$$E_2 = \{S, N, G, W, T\}$$

$$n(E_2) = 5$$

$$P(E_2) = \frac{5}{7} \quad \text{ตอบ}$$

3. ให้ E_3 แทน เหตุการณ์ที่ได้ S

$$E_3 = \{S\}$$

$$n(E_3) = 1$$

$$P(E_3) = \frac{1}{7} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 8 จากการสอบถามนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นรายคนจำนวน 50 คน ว่าชอบเรียน
วิชาคณิตศาสตร์หรือไม่
แสดงดังตาราง

คำตอบ \ ชั้น	ม.1	ม.2	ม.3	รวม
ชอบ	8	10	12	30
ไม่ชอบ	2	8	3	13
ไม่แสดงความคิดเห็น	2	4	1	7
รวม	12	22	16	50

จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มนักเรียนขึ้นมา 1 คน แล้วจะได้

1. นักเรียนชอบเรียนคณิตศาสตร์
2. นักเรียนไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์
3. เป็นนักเรียนชั้น ม.3

เท่ากับ $\frac{10}{50} = 0.20$ ตอบ

ตัวอย่าง 9 กำหนดให้ S แทน กลุ่มของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 9 และ E แทนกลุ่มของจำนวนคู่
ถ้าสุ่มจำนวนขึ้นมา 1 จำนวนจงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. จำนวนคู่
2. จำนวนคี่
3. จำนวนคู่หรือจำนวนคี่

วิธีทำ ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$n(S) = 9$$

$$E = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$n(E) = 4$$

1. ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนคู่ $= P(E)$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{4}{9}$$

ตอบ

2. ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนคี่ $= P(E')$

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$P(E') = 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

ตอบ

3. ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ คือ $P(S)$ นั่นเอง

$$\text{ดังนั้น } P(S) = \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$= 1$$

ตอบ

ตัวอย่าง 10 โยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมบนหน้าลูกเต๋าน้อยกว่า 10

วิธีทำ จากตัวอย่างที่แล้วมาจะได้ $n(S) = 36$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าดังแต่ 10 ขึ้นไป

$$E = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$n(E) = 6$$

$$P(E) = \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมบนหน้าลูกเต๋าน้อยกว่า 10 เท่ากับ $\frac{5}{6}$ ตอบ

7. ความน่าจะเป็นเกี่ยวกับการตัดสินใจ

ในชีวิตจริงมีเหตุการณ์บางเหตุการณ์แม้ว่าจะทราบว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด ก็อาจไม่เพียงพอที่จะช่วยในการตัดสินใจได้ จำเป็นต้องหาองค์ประกอบอื่นมาช่วยในการตัดสินใจ เช่น ผลตอบแทนของการเกิดเหตุการณ์ซึ่งหมายถึง ผลตอบแทนที่ได้หรือผลตอบแทนที่เสีย

คำจำกัดความ = ผลรวมของผลคูณระหว่างความน่าจะเป็นของเหตุการณ์กับผลตอบแทนของเหตุการณ์

ตัวอย่าง 11 ในการเล่นเกมโยนเหรียญสองเหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง มีกติกาว่าถ้าเหรียญที่โยนออกหัวทั้งคู่ อัสนิจะจ่ายเงินให้วสันต์ 8 บาท แต่ถ้าเหรียญออกเป็นอย่างอื่น วสันต์ต้องจ่ายเงินให้อัสนิ 2 บาท ในการเล่นเกมพนันครั้งนี้ ใครมีโอกาสได้เงินมากกว่ากัน

แนวคิด การโยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง

ผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น มี 4 แบบ คือ HH HT TH และ TT

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวทั้งคู่ $= \frac{1}{4}$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญไม่ออกหัวทั้งคู่ $= \frac{3}{4}$

ให้ ผลตอบแทนของเหตุการณ์ที่วสันต์ได้เงิน 8 บาท แทนด้วย $+8$

ให้ ผลตอบแทนของเหตุการณ์ที่วสันต์เสียเงิน 2 บาท แทนด้วย -2

$$\begin{aligned}\text{ค่าคาดหวัง} &= [\text{ผลตอบแทนที่ได้} \times \text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวทั้งคู่}] \\ &+ [\text{ผลตอบแทนที่เสีย} \times \text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญไม่ออกหัวทั้งคู่}] \\ &= (8 \times \frac{1}{4}) + (-2 \times \frac{3}{4}) \\ &= 2 + (-\frac{6}{4}) \\ &= 0.50 \text{ บาท}\end{aligned}$$

นั่นคือค่าคาดหวังที่วสันต์จะได้เงิน เท่ากับ **0.50** บาท แสดงว่าวสันต์จะได้เงินมากกว่า อัสนิ

สังเกต

ถ้าค่าคาดหวังที่คำนวณได้เป็นจำนวนลบ แสดงว่า อัสนิจะได้เงินมากกว่าวสันต์

8. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E_1 หรือเหตุการณ์ E_2

ข้อตกลงเบื้องต้น

ในเรื่องที่จะกล่าวต่อไปนี้ ผู้เรียนจะต้องศึกษาเรื่อง เซต ให้เข้าใจเสียก่อนเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์

$E_1 \cup E_2$ แทน เหตุการณ์ E_1 หรือเหตุการณ์ E_2

$E_1 \cap E_2$ แทน เหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2

$P(E_1 \cup E_2)$ แทน ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ E_1 หรือเหตุการณ์ E_2

$P(E_1 \cap E_2)$ แทน ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2

ตัวอย่าง 12 กำหนดให้ $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$E_1 = \{1, 3, 5, 7\}$

$E_2 = \{3, 7, 8\}$

จงหา $P(E_1 \cup E_2)$

วิธีทำ จากกำหนดให้จะได้ว่า $n(S) = 10$

$n(E_1) = 4$

$n(E_2) = 3$

$P(E_1) = \frac{4}{10}$

$P(E_2) = \frac{3}{10}$

$E_1 \cup E_2 = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

$n(E_1 \cup E_2) = 5$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)}$

$$= \frac{5}{10}$$

ตอบ

$$\text{แต่ } E_1 \cap E_2 = \{3, 7\}$$

$$n(E_1 \cap E_2) = 2$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{10}$$

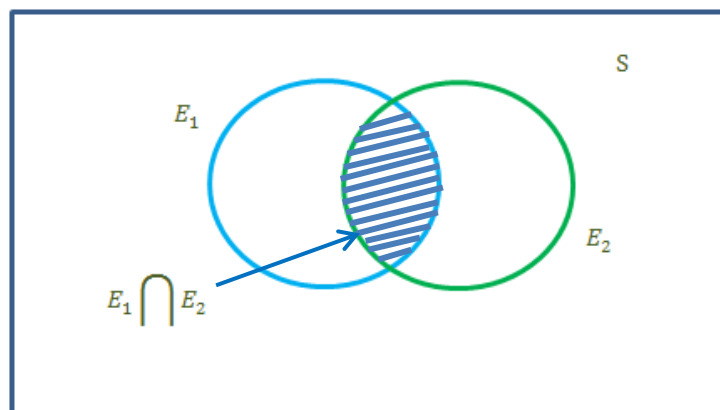
$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10}$$

$$= \frac{5}{10}$$

$$\text{ดังนั้นสรุปได้ว่า } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

จากการหาความน่าจะเป็นของ $E_1 \cup E_2$ แยกออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

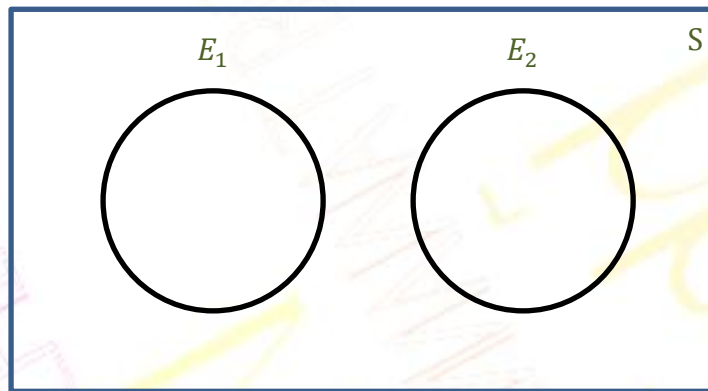
กรณีที่ 1 E_1 และ E_2 มีส่วนที่เกิดร่วมกัน ดังแผนภาพ



$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

กรณีที่ ๒

E_1 และ E_2 ไม่มีส่วนที่เกิดร่วมกัน ดังแผนภาพ



$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

ตัวอย่าง 13 นักเรียนห้องหนึ่งมี 50 คน จากการสอบถามปรากฏว่ามีนักเรียนเป็นโรคตา 20 คน เป็นโรคฟัน 25 คน และเป็นโรคตาและโรคฟัน 10 คน ถ้าสุ่มนักเรียนในห้องนี้ขึ้นมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่เป็นโรคตาหรือโรคฟัน

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

$$n(S) = 50$$

ให้

$$n(A) = \text{จำนวนนักเรียนที่เป็นโรคตา} = 20$$

$$n(B) = \text{จำนวนนักเรียนที่เป็นโรคฟัน} = 25$$

$$n(A \cap B) = \text{จำนวนนักเรียนที่เป็นโรคตาและโรคฟัน} = 10$$

จากสูตร

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{20+25-10}{50}$$

$$= \frac{35}{50}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$= 0.7$$

ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้นักเรียนคนหนึ่งที่เป็นโรคตาหรือฟัน = 0.7 ตอบ

ตัวอย่าง 14 กำหนดให้ $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, A เป็นกลุ่มของจำนวนที่ที่อยู่ใน S , B เป็นกลุ่มของจำนวนเฉพาะใน S จงหา $P(A \cup B)$ และ $P(A \cap B)$

วิธีทำ เขียนเซต A ทั้งหมดจะได้ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$n(A) = 5$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$n(B) = 4$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$n(A \cup B) = 6$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{10}$$

$$= 0.6$$

$$A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$= 0.3$$

ตอบ

หมายเหตุ นอกจากวิธีนี้แล้วยังใช้สูตรได้ คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{6}{10}$$

$$= 0.6$$

และ

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{6}{10}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$= 0.3$$

ตอบ

แฟกทอเรียล (*Factorial*)

กำหนดจำนวนเต็มบวก n หรือ 0 เรียกสัญลักษณ์ $n!$ ว่า n – *factorial*

$$\text{ซึ่ง } n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8! &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6! \\ &= 8 \cdot 7! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9! \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8! \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

สิ่งที่ต้องจำ

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$\begin{aligned} 2! &= 1 \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 720 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 15 จงหาค่าของ

1. $\frac{3!6!}{2!4!}$

2. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

วิธีทำ 1. $\frac{3!6!}{2!4!} = \frac{(3 \cdot 2!)(6 \cdot 5 \cdot 4!)}{2!4!}$

$$= 3 \cdot 6 \cdot 5$$

$$= 90$$

ตอบ

2. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$

$$= (n+1)n(n-1)$$

$$= n(n+1)(n-1)$$

$$= n(n^2 - 1)$$

$$= n^3 - n$$

ตอบ

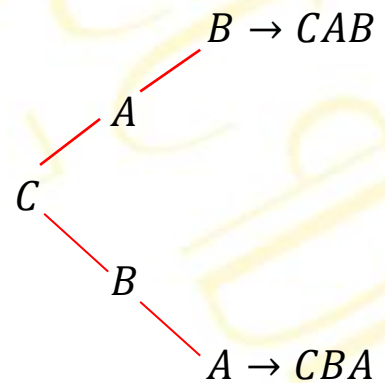
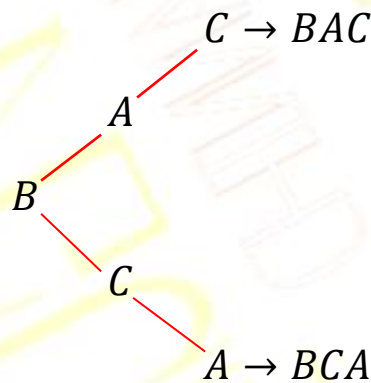
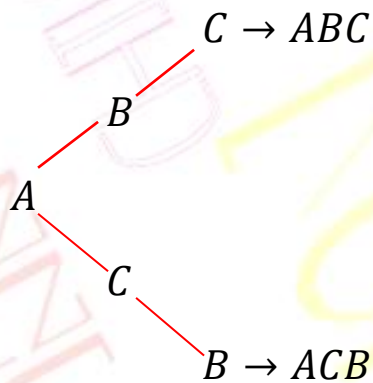
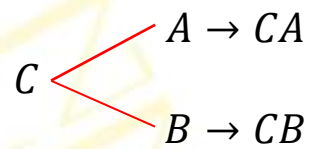
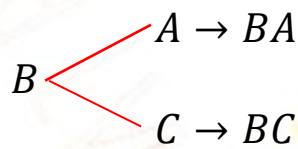
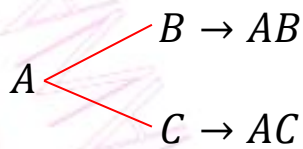
วิธีเรียงสับเปลี่ยน (*Permutation*)

เป็นการจัดสิ่งของโดยถือลำดับเป็นสิ่งสำคัญ หรือเรียกว่า การจัดลำดับก็ได้ เช่น จัดอักษร A, B, C

จัดอักษร 3 ตัว คราวละ 2 ตัว จัดได้คือ AB, AC, BA, BC, CA, CB

จัดอักษร 3 ตัว คราวละ 3 ตัว จัดได้คือ $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$

เขียน *tree diagram* ได้ดังนี้



ถ้าให้ nP_r แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันคราวละ r สิ่ง แล้ว

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 16 1. จงหาค่าของ 5P_3

2. จงหาค่าของ $\frac{{}^5P_5 \cdot {}^8P_8}{{}^6P_6}$

วิธีทำ 1.

$$\begin{aligned}
 {}^5P_3 &= \frac{5!}{(5-3)!} \\
 &= \frac{5!}{2!} \\
 &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \\
 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \\
 &= 60
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{{}^5P_5 \cdot {}^8P_8}{{}^6P_6} = \frac{\frac{5!}{(5-5)!} \cdot \frac{8!}{(8-8)!}}{\frac{6!}{(6-6)!}}$$

$$= \frac{\frac{5!}{0!} \cdot \frac{8!}{0!}}{\frac{6!}{0!}}$$

$$= \frac{5! \cdot 8!}{6!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7$$

$$= 6,720$$

ตอบ

ตัวอย่าง 17 จัดตัวเลข 1,2,3,4,5,6 คราวละ 3 ตัว ได้กี่จำนวน

วิธีทำ เปรียบเสมือนจัดของ 6 สิ่งที่แตกต่างกันคราวละ 3 สิ่ง

$$\text{จัดได้} = {}^6P_3 \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$= \frac{6!}{3!}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$= 120$$

จัดตัวเลข 6 ตัว ต่างกันคราวละ 3 ตัว จะได้เท่ากับ 120 จำนวน

ตอบ

ตัวอย่าง 18 ในการเลือกประธานและรองประธานนักเรียนจากผู้สมัคร 12 คน จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เลือกได้} &= {}^{12}P_2 \\&= \frac{12!}{(12-2)!} \\&= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} \\&= 12 \cdot 11 \\&= 132 \text{ วิธี} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

การจัดของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นวงกลม จัดได้ $(n-1)!$ วิธี เช่น จัดคน 6 คน นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม

$$\begin{aligned}\text{จัดได้} &= (6-1)! \\&= 5! \\&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\&= 120 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

การจัดหมู่ (Combination)

เป็นการจัดสิ่งของโดยไม่ถือลำดับเป็นสำคัญ บางครั้งเรียกว่า “การเลือก” เช่น เรียงสับเปลี่ยนอักษร 3 ตัว คราวละ

2 ตัว เช่น จัด A, B, C จัดได้ AB, AC, BA, BC, CA, CB

ซึ่งการจัดหมู่ถือว่า AB และ BA, AC และ CA, BC และ CB เหมือนกันไปแต่ละคู่ ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดหมู่จึงน้อยกว่าวิธีเรียงสับเปลี่ยน

ถ้าให้ nC_r แทนจำนวนวิธีการจัดหมู่สิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันคราวละ r สิ่ง แล้ว

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

ตัวอย่าง 19 จงหาค่าของ 8C_3 และ 8C_5

วิธีทำ

$$\begin{aligned} {}^8C_3 &= \frac{8!}{(8-3)! 3!} \\ &= \frac{8!}{5! 3!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 56 \end{aligned}$$

ตอบ

$$\begin{aligned} {}^8C_5 &= \frac{8!}{(8-5)! 5!} \\ &= \frac{8!}{3! 5!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} \\ &= 56 \end{aligned}$$

ตอบ

จะเห็นว่า

$${}^8C_3 = {}^8C_5$$

หรือ

$${}^8C_3 = {}^8C_{8-3}$$

นั่นคือ

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

เช่น

$${}^{100}C_2 = {}^{100}C_{98}$$

$${}^{10}C_7 = {}^{10}C_3$$

ตัวอย่าง 20 เลือกผู้แทน 3 คน จากผู้สมัคร 7 คน ได้กี่วิธี

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เลือกได้} = {}^7C_3 \quad \text{วิธี}$$

$$= \frac{7!}{(7-3)! 3!}$$

$$= \frac{7!}{4! 3!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 35 \quad \text{วิธี}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 21 หยิบลูกบอล 2 ลูก จากถุงซึ่งมีลูกบอลสีต่างกัน 10 ลูก จะเลือกหยิบได้กี่วิธี

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เลือกได้} = {}^{10}C_2 \quad \text{วิธี}$$

$$= \frac{10!}{(10-2)! 2!}$$

$$= \frac{10!}{8! 2!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! 2 \cdot 1}$$

$$= 45 \quad \text{วิธี}$$

ตอบ

$$\text{ข้อควรจำ} \quad {}^nC_0 = 1$$

$${}^nC_n = 1$$

$${}^nC_1 = n$$

ไพ่ (Poker) 1 สำรับ มี 52 ใบ แบ่งออกเป็น

ก. ๒ สี คือ สีดำ และสีแดง สีละ ๒๖ ใบ

ប. 4 ថ្ម គឺ ឆ្នាំ (spade) 13 ប្រ

ໂພດ (heart) 13 ຄູ່

ប៉ាវអາມຕັດ (*diamond*) 13 ។

ດອກຈັກ (*club*) 13 ິບ

ໂພດາ (ສັດຕູ) : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

ໂພລດ (ແລ) : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

ข้าหลวงตัด (สีแดง) : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

ดอกจิก (สี่ตำ) : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

ກຸຮງບຸກຄົນ (Binomial Theorem)

$$(x + a)^0 = 1$$

$$(x + a) = x + a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

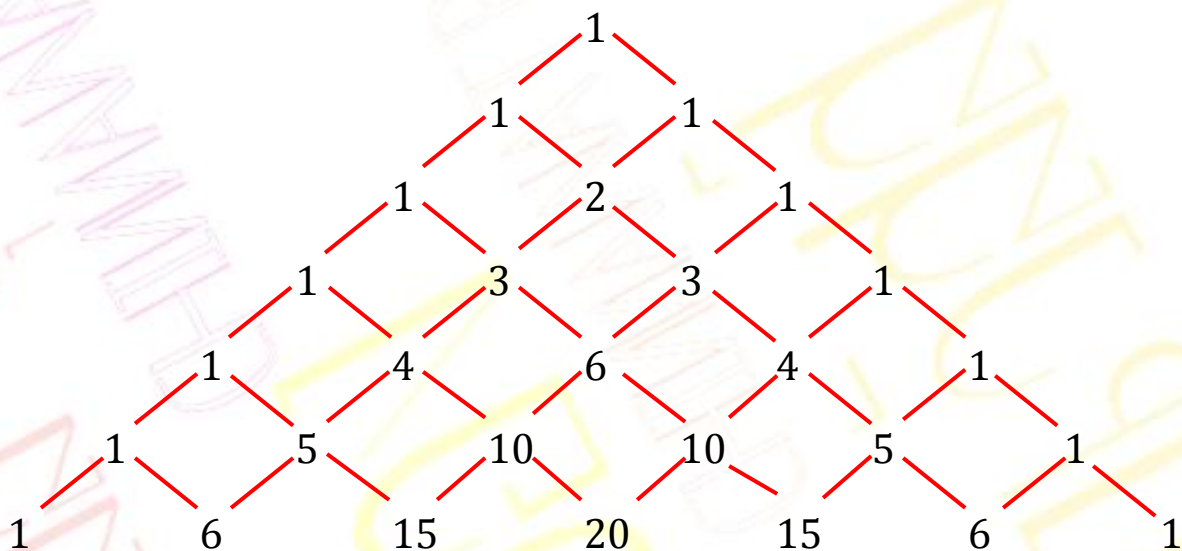
$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

$$(x + a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$$

ถ้านำสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์มาเขียน จะได้



รูปสามเหลี่ยมข้างบนเรียกว่า รูปสามเหลี่ยม ปาสกาล (*Pascal's triangle*)

สูตรการกระจาย

$$(x + a)^n$$

$$(x + a)^n = x^n + {}^nC_1 ax^{n-1} + {}^nC_2 a^2 x^{n-2} + {}^nC_3 a^3 x^{n-3} + \dots + a^n$$

ตัวอย่าง 22 จงกระจาย $(x + 2)^6$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (x + 2)^6 &= x^6 + {}^6C_1 2x^5 + {}^6C_2 2^2 x^4 + {}^6C_3 2^3 x^3 + {}^6C_4 2^4 x^2 + {}^6C_5 2^5 x + 2^6 \\ &= x^6 + 6 \cdot 2 \cdot x^5 + 15 \cdot 4 \cdot x^4 + 20 \cdot 2^3 \cdot x^3 + 15 \cdot 2^4 \cdot x^2 + 6 \cdot 2^5 \cdot x + 2^6 \\ &= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ${}^6C_1 \cdot 2 \cdot x^5 = 6 \cdot 2 \cdot x^5$

$$= 12x^5$$

$${}^6C_2 \cdot 2^2 \cdot x^4 = \frac{6!}{4! 2!} \cdot 4 \cdot x^4$$

$$= 60x^4$$

$${}^6C_3 \cdot 2^3 \cdot x^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot 8 \cdot x^3$$

$$= 160x^3$$

ข้อสังเกต ในกรณีที่เลขชี้กำลังของ x ลดลงทีละ 1 เลขชี้กำลังของ 2 เพิ่มขึ้นทีละ 1 และจำนวนพจน์ที่กระจายได้จะมากกว่าเลขชี้กำลังอยู่ 1 เสมอ

ตัวอย่าง 23 จงกระจาย $(a - b)^7$

$$\text{วิธีทำ } (a - b)^7 = [a + (-b)]^7$$

$$= a^7 + {}^7C_1(-b)a^6 + {}^7C_2(-b)^2a^5 + {}^7C_3(-b)^3a^4 + {}^7C_4(-b)^4a^3 + {}^7C_5(-b)^5a^2 + {}^7C_6(-b)^6a + (-b)^7$$

$$= a^7 + 7(-b)a^6 + 21(-b)^2a^5 + 35(-b)^3a^4 + 35(-b)^4a^3 + 21(-b)^5a^2 + 7(-b)^6a + (-b)^7$$

$$= a^7 + 7(-b)a^6 + 21b^2a^5 + 35(-b)^3a^4 + 35b^4a^3 + 21(-b)^5a^2 + 7b^6a + (-b^7)$$

$$= a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 1a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

ตอบ

พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(x + a)^n$

ให้ T_r เป็นพจน์ที่ r ของการกระจาย $(x + a)^n$

$$T_{r+1} = {}^nC_r a^r x^{n-r}$$

ตัวอย่าง 24 จงหาพจน์ที่ 9 ของการกระจาย $(x + a)^{12}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad T_9 &= T_{8+1} \\ &= {}^{12}C_8 a^8 x^{12-8} \\ &= \frac{12!}{4! 8!} a^8 x^4 \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!} a^8 x^4 \\ &= 495 a^8 x^4\end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 25 จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจาย $(x^2 - y^2)^{11}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad T_4 &= T_{3+1} \\ &= {}^{11}C_3 (-y^2)^3 (x^2)^{11-3} \\ &= \frac{11!}{8! 3!} (-y^6)(x^2)^8 \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (-y^6)x^{16} \\ &= -165 x^{16} y^6\end{aligned}$$

ตอบ
